

# 鏡映を用いた 3次元正多面体の決定

前 はづき  
代数学研究室

正多面体は一般に中学校の数学などに登場し、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5種類のみであると学ぶ。その証明方法はいくつかあるが、中学校の数学では、1つの頂点に集まる正多角形の内角の和を実際に計算する方法で証明されることが多い。すなわち、1つの頂点に集まる正多角形の内角の和が $360^\circ$ 未満になるものだけを考えるのである。

この方法と着眼点は同じだが、オイラーの等式を用い、いくつかの数式や条件式から正多面体を決定する方法も広く知られている。そして、もうひとつ別の方法として、鏡映という平面に関する折り返しを用いた正多面体の決定方法もある。その概略は次の通りである。

正多面体の形状を変えない線形変換全体を考える。これは群をなし、鏡映によって生成される。そのとき、その生成元となる鏡映を用いて、コクセター図形とよばれるグラフが定義され、このコクセター図形によって正多面体が決定される。この論文の目的は、この決定方法を説明することである。

コクセター図形を用いる方法は、一見すると難儀な方法のように思えるかもしれないが、2次元正多面体(正多角形)はもとより高次元正多面体をも決定することができる。これはオイラーの等式を用いた方法とは異なり、大きな利点である。

まず§1において、オイラーの等式を用いた正多面体の決定方法を紹介し、正多面体が上記の5種類であることを確認する。§2では、格子や鏡映の定義とそれらの基本的な性質を述べる。そして§3において、正多面体からコクセター図形を作る方法を説明し、逆にコクセター図形から正多面体が決定されることを観察する。この論文では正二十面体を例として説明する。

この論文のアイデアは、参考文献[1]の第6章と[3]に基づいている。しかし§3の後半に述べている、コクセター図形から正多面体を導く方法については、[1]において正六面体を例にして説明がされているが、この論文では正二十面体での考察を行った。

## §1. オイラーの等式を用いた正多面体の決定方法

ここでは、オイラーの等式を用いた正多面体の決定方法を述べる。その前に、必要となる定義や定理を書いておく。

### 定義 1

多面体のうち、内部のどの2点間も、外部を通らない線分でつなぐことができるものを**凸多面体**という。また、凸多面体のうち、いくつかの合同な正多角形によってつくられ、各頂点に集まる多角形の個数が等しいものを**正多面体**という。

### 定理 1 (オイラーの等式)

凸多面体において、それを構成する多角形の数(面の数)を $s$ 、辺の数を $e$ 、頂点の数を $v$ とする。このとき等式

$$v - e + s = 2$$

が成立する。

定理1の証明は、参考文献 [1] の第4章 p.43-47 を参照。ここでは、この定理を用いて正多面体を決定する。

## 定理2

正多面体は、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5種類に限られる。

**証明** まず、1つの正多面体を想定し、それを構成する正多角形の数を  $s$ 、辺の数を  $e$ 、頂点の数を  $v$  とする。そして、1つの頂点には  $k$  個の面が集まっているとする。 ( $k \geq 3$  であることに注意する。) このとき、数の組  $(n, k, s)$  にどのような可能性があるのか絞り込んでいく。

正  $n$  角形の1つの内角は

$$\pi\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

である。

( $\because$   $n$  角形の内角の和は  $\pi(n-2)$  となるので、1つの内角はその  $\frac{1}{n}$  である.)

この  $n$  は 3, 4, 5 のいずれかでなければならない。実際、1つの頂点に集まってくる  $k$  個の正  $n$  角形の各々の内角の和は

$$\pi\left(1 - \frac{2}{n}\right) \times k$$

となり、それは尖った頂点をつくるので  $2\pi$  より小さい。さらに  $k \geq 3$  であるから

$$\pi\left(1 - \frac{2}{n}\right) \times 3 \leq \pi\left(1 - \frac{2}{n}\right) \times k < 2\pi$$

である。これから  $n < 6$  が得られる。

また、正多面体において  $v = \frac{ns}{k}$ 、 $e = \frac{ns}{2}$  が成り立つので、オイラーの等式から

$$v - e + s = \frac{ns}{k} - \frac{ns}{2} + s = s\left(\frac{n}{k} - \frac{n-2}{2}\right) = 2$$

となる。 $\frac{n}{k} - \frac{n-2}{2} > 0$  であるから  $k \geq 3$  と合わせると

$$3 \leq k < \frac{2n}{n-2}$$

が得られる。これらの不等式を用いて、可能な組  $(n, k, s)$  を列挙すると次のようになる。

- $n = 3$  のとき、 $3 \leq k < 6$  となり、これを満たす  $k$  は  $k = 3, 4, 5$  のいずれか。よって、 $(n, k, s)$  の可能な組は  $(3, 3, 4)$ ,  $(3, 4, 8)$ ,  $(3, 5, 20)$  である。
- $n = 4$  のとき、 $3 \leq k < 4$  となり、これを満たす  $k$  は  $k = 3$  のみ。よって、 $(n, k, s)$  の可能な組は  $(4, 3, 6)$  である。
- $n = 5$  のとき、 $3 \leq k < \frac{10}{3}$  となり、これを満たす  $k$  は  $k = 3$  のみ。よって、 $(n, k, s)$  の可能な組は  $(5, 3, 12)$  である。

したがって、この検討を経て5種類の可能性だけ残されるが、この各々に対し、実際の正多面体が構成される (図1参照)。よって、それらが実際に存在する正多面体のすべてである。  $\square$

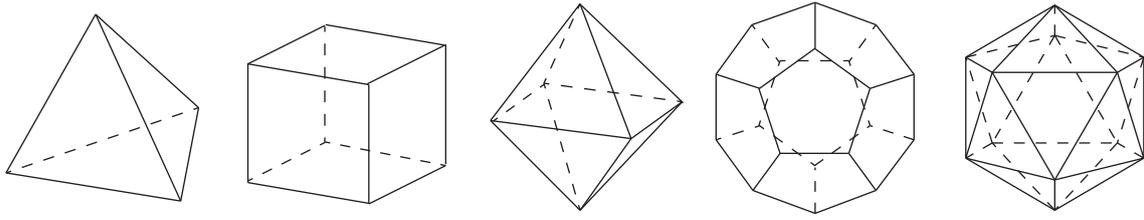


図 1

## §2. 3次元空間の格子と鏡映群

§1 ではオイラーの等式を用いて、正多面体を決定した。正多面体は3次元空間の鏡映を用いても決定することができる。その決定方法は §3 で説明される。ここでは、その際に必要となる格子や鏡映の定義とそれらの基本的な性質を述べる。

### 定義 2

3次元空間のベクトル  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,  $v' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$  の内積を  $(v, v') = aa' + bb' + cc'$  で定義する。

また  $v$  のノルム (長さ) を  $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$  で定める。

### 命題 1

$v, v'$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\cos \theta = \frac{(v, v')}{\|v\| \cdot \|v'\|}.$$

### 定義 3

3つのベクトル  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R}^3$  をとってくる。  $v_1, v_2, v_3, 0$  が同一直線上にないとき (すなわち  $v_1, v_2, v_3$  が一次独立であるとき), 集合

$$L = L(v_1, v_2, v_3) = \{\ell v_1 + m v_2 + n v_3 : \ell, m, n \in \mathbf{Z}\}$$

を空間  $\mathbf{R}^3$  の格子という。

### 定義 4

$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$  について格子  $L(v_1, v_2, v_3)$  を作ったとき,

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

をその生成行列という。

### 定義5

3次正方行列  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  に対して

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{pmatrix} \end{array}$$

を対応させることによって、空間の点の変換が引き起こされる。この変換のことも  $M$  で表す。この変換は線形変換である。

さらに3次正方行列  $M' = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}$  が与えられているとき、 $M$  を施してからさらに線形変換  $M'$  を行うことができる。このようにして得られる線形変換を  $M'M$  で表す。

### 定義6

格子  $L = L(v_1, v_2, v_3)$  に対して

$$C = C(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & (v_1, v_3) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & (v_2, v_3) \\ (v_3, v_1) & (v_3, v_2) & (v_3, v_3) \end{pmatrix}$$

を  $L$  の**交点行列**という。

### 定義7

ベクトル  $r$  の長さが  $\sqrt{2}$  であるとき、 $r$  を**ルートベクトル**とよぶ。

今、 $r$  をルートベクトルとする。このとき、3次元空間の線形変換  $S_r$  を次のように定める：

$$\begin{array}{ccc} S_r : \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ v & \longmapsto & v - 2\frac{(v,r)}{(r,r)}r = v - (v,r)r \end{array}$$

この  $S_r$  を  $r$  に関する**鏡映**とよぶ。

この変換で  $v = r$  とおくと、 $S_r(r) = -r$  である。また、 $v$  が  $r$  と直交しているとき、 $(v,r) = 0$  より  $S_r(v) = v$  である。したがって、 $S_r$  は  $r$  と直交する任意の平面を鏡と見たてたときに鏡に映る世界を表している変換である。

### 定義8

いくつかの鏡映をもとにして、その合成によってつくられる線形変換すべてを集めた集合は、写像の合成を演算として群をなす。この群を**鏡映群**という。特に、有限個の元からなる鏡映群を**有限鏡映群**という。

### 補題1

$S_r, S_{r'}$  を2つの鏡映とする。このとき、 $S_r \circ S_{r'}$  は回転になる。

### §3. 鏡映を用いた正多面体の決定方法

ここでは、鏡映を用いた正多面体の決定方法を説明する。その際に交点行列を図形化したグラフを用いるので、先に正多面体からグラフの構成方法を説明する。

まず、正二十面体を例にして説明する。

正二十面体は図2のように立方体に内接させることができる [2 ; p.105]。今、正二十面体が、1辺の長さが2の立方体に内接しているとする。

正二十面体の1辺の長さを  $2s$  とすると頂点 A, B, C の座標は

$$A(1, -s, 0), B(1, s, 0), C(s, 0, 1)$$

となる。

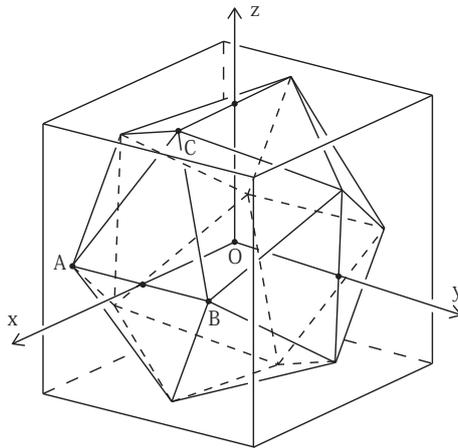


図2

$\triangle ABC$  は正三角形で、辺の長さは  $2s$  であるから、特に  $|\overrightarrow{BC}| = 2s$  で

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OB}|^2 = \left| \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \begin{pmatrix} s-1 \\ -s \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= (s-1)^2 + (-s)^2 + 1^2 = 2s^2 - 2s + 2 \end{aligned}$$

よって、 $2s^2 - 2s + 2 = 4s^2$  すなわち  $2s^2 + 2s - 2 = 0$ 。  $\therefore s^2 + s - 1 = 0$ 。

$\triangle ABC$  の重心を  $G$  とすると、 $G$  の座標は  $G\left(\frac{s+2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$  である。

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OG}) = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{s+2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{s+2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OG}) &= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}) = \left( \left( \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{s+2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} s-1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{s+2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{(s-1)(s+2)}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(s^2 + s - 1) = 0
\end{aligned}$$

であるから、 $\triangle ABC$  と  $\overrightarrow{OG}$  は直交することがわかる。

そこで、中心  $O$ 、面の中心  $P_1\left(\frac{s+2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$ 、辺の中点  $P_2(1, 0, 0)$ 、頂点  $P_3(1, s, 0)$  と定めることにする。このとき  $\overrightarrow{OP_1}$ 、 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 、 $\overrightarrow{P_2P_3}$  は互いに直交する。

立体  $OP_1P_2P_3$  は底面が  $\triangle P_1P_2P_3$  である三角錐になっている。このとき  $P_1$  を除いた側面  $OP_2P_3$  に垂直で、三角錐の外側に向いているループベクトルを  $u_1$  とし、同様に  $u_2, u_3$  を定めると

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{s+1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。この3つのループベクトル  $u_1, u_2, u_3$  は格子  $L(u_1, u_2, u_3)$  をつくっている。さらに、その交点行列  $C = C(u_1, u_2, u_3)$  は次のようになる：

$$C = \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & (u_1, u_3) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & (u_2, u_3) \\ (u_3, u_1) & (u_3, u_2) & (u_3, u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

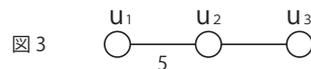
つぎに、交点行列を以下の方法で図形化する。

(i) 格子を生成しているループベクトルの数と同じ数の  $\circ$  を書き、それぞれ  $\circ$  とループベクトルを対応させる。

(ii)  $u_i, u_j$  のなす角を  $\theta_{ij}$  とする。  $m$  を2以上の自然数と仮定すると  $\theta_{ij} = \pi - \frac{\pi}{m}$  と置けるが

- $m = 3$  のとき、対応する2つの  $\circ$  を線分でつなぐ。
- $m = 2$  のとき、何も書かない。
- $m \geq 4$  のとき、対応する2つの  $\circ$  を線分でつなぎ、その線分のそばに数字  $m$  を書く。

実際、いま正二十面体から得られた交点行列は図3のように図形化される。



一般に、有限鏡映群  $G$  のもとになるループベクトルがあり、それらで生成されている格子があれば、交点行列に対応してこのような図形を書くことができる。それを  $G$  の**コクセター図形**とよぶ。

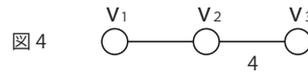
### 正六面体とコクセター図形との対応

今、8つの頂点 $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ で与えられる正六面体を考える。

中心 $O$ 、面の中心 $P_1(0, 0, 1)$ 、辺の中点 $P_2(0, -1, 1)$ 、頂点 $P_3(-1, -1, 1)$ とし、先程と同様にルートベクトル $v_1, v_2, v_3$ を定める。

すると、 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 、 $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となることがわかる。

これらのベクトルから生成される格子を用いて正六面体と対応するコクセター図形を描くと図4のようになる。



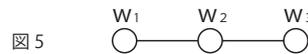
### 正四面体とコクセター図形との対応

今、4つの頂点が $(1, 1, 1)$ 、 $(-1, -1, 1)$ 、 $(1, -1, -1)$ 、 $(-1, 1, -1)$ で与えられる正四面体を考える。

中心 $O$ 、面の中心 $P_1(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 、辺の中点 $P_2(0, 0, 1)$ 、頂点 $P_3(1, 1, 1)$ とし、同様にルートベクトル $w_1, w_2, w_3$ を定める。

すると、 $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 、 $w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となることがわかる。

これらのベクトルから生成される格子を用いて正四面体と対応するコクセター図形を描くと図5のようになる。



3次元空間の正多面体は図1の5種類のみであることは定理2で確認した。これらの5つの図形の間には次に述べる双対関係があり、本質的に3種類と見なせる。

まず、正六面体すなわち立方体を考える。

立方体の6つの面の中心をマークし、その6つの点を結んでいくと立方体の内部に正八面体が現れる。また、正八面体の8つの面の中心をマークし、これらを結んでいくと正八面体の内部に立方体が現れる。この意味で正六面体と正八面体は互いに双対である。

同様に、正十二面体の12の面の中心を頂点とする立体は正二十面体であり、正二十面体の20の面の中心を頂点とする立体は正十二面体となる。したがって、正十二面体と正二十面体も互いに双対である。

正四面体が残るが、上と同様の操作を行うと正四面体の双対は正四面体であることが分かる。

したがって、図3～5によって正多面体にコクセター図形を対応させることができた。

今は、正多面体からコクセター図形が構成されることを観察したが、逆にコクセター図形から出発して、それと対応している正多面体を（双対なものを同じものと見なした上で）決定することができる。ここでは、図3のコクセター図形から正二十面体を見る方法を説明する [3 ; p89-90] .

点  $P_1, P_2, P_3$  を次の2つの条件を満たすようにとることが鍵となる.

- $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}$  は互いに直交する.
- $P_1$  は  $S_{u_2} \circ S_{u_3}$  の回転軸上,  $P_2$  は  $S_{u_3} \circ S_{u_1}$  の回転軸上,  $P_3$  は  $S_{u_1} \circ S_{u_2}$  の回転軸上にある.

コクセター図形から内積  $(u_i, u_j)$  がわかるので,  $S_{u_1}, S_{u_2}, S_{u_3}$  により  $u_i (i = 1, 2, 3)$  がどのようなベクトルに写されるのかわかる. これをもとに, まず,  $S_{u_2} \circ S_{u_3}, S_{u_3} \circ S_{u_1}, S_{u_1} \circ S_{u_2}$  のそれぞれがどのような回転なのかを調べる. ここでは  $u_1$  の移動を見る.

$$\begin{aligned} & \underline{S_{u_2} \circ S_{u_3}} \\ S_{u_2} \circ S_{u_3}(u_1) &= u_1 + (s+1)u_2, \\ S_{u_2} \circ S_{u_3}(u_1 + (s+1)u_2) &= u_1 + (s+1)u_2 + (s+1)u_3, \\ S_{u_2} \circ S_{u_3}(u_1 + (s+1)u_2 + (s+1)u_3) &= u_1. \end{aligned}$$

よって, 3回の回転で1周する.

$$\begin{aligned} & \underline{S_{u_3} \circ S_{u_1}} \\ S_{u_3} \circ S_{u_1}(u_1) &= -u_1, \\ S_{u_3} \circ S_{u_1}(-u_1) &= u_1. \end{aligned}$$

よって, 2回の回転で1周する.

しかし, これだけでは回転の方向がわからないため, ここでは  $u_3$  の移動も見る.

$$\begin{aligned} S_{u_3} \circ S_{u_1}(u_3) &= -u_3, \\ S_{u_3} \circ S_{u_1}(-u_3) &= u_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{S_{u_1} \circ S_{u_2}} \\ (S_{u_1} \circ S_{u_2})(u_1) &= (s+1)u_1 + (s+1)u_2, \\ (S_{u_1} \circ S_{u_2})((s+1)u_1 + (s+1)u_2) &= u_2, \\ (S_{u_1} \circ S_{u_2})(u_2) &= -(s+1)u_1 - u_2, \\ (S_{u_1} \circ S_{u_2})(-(s+1)u_1 - u_2) &= -u_1 - (s+1)u_2, \\ (S_{u_1} \circ S_{u_2})(-u_1 - (s+1)u_2) &= u_1. \end{aligned}$$

よって, 5回の回転で1周する.

次に, 回転面と回転軸が直交することを利用して, 回転軸の方向ベクトルを調べる.

まず,  $S_{u_2} \circ S_{u_3}$  の回転面上にあるベクトルの  $\{u_1 + (s+1)u_2\} - u_1$  と  $\{u_1 + (s+1)u_2 + (s+1)u_3\} - u_1$  のどちらとも直交するベクトルを求める. (これが  $S_{u_2} \circ S_{u_3}$  の回転軸の方向ベクトルとなる.)

$$\text{求めるベクトルを } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ とおくと, } \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{s+1}{\sqrt{2}} \\ \frac{s+2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{s+1}{\sqrt{2}} \\ \frac{s+2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

$$\text{これを解くと, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s+2)z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} s+2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3z \begin{pmatrix} \frac{s+2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

次に,  $S_{u_3} \circ S_{u_1}$  の回転面上にあるベクトルの  $(-u_1) - u_1$  と  $(-u_3) - u_3$  のどちらとも直交するベクトルを求める. すなわち,  $u_1$  と  $u_3$  のどちらとも直交するベクトルを求めればよい.

$$\text{求めるベクトルを } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ とおくと, } \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = 0, \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = 0.$$

$$\text{これを解くと, } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

次に,  $S_{u_1} \circ S_{u_2}$  の回転面上にあるベクトルの  $\{(s+1)u_1 + (s+1)u_2\} - u_1$  と  $u_2 - u_1$  のどちらとも直交するベクトルを求める.

$$\text{求めるベクトルを } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \text{ とおくと, } \left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{s+1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-s+2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right) = 0, \left( \begin{pmatrix} -\frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{s+3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right) = 0.$$

$$\text{これを解くと, } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ sx'' \\ 0 \end{pmatrix} = x'' \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

そこで,  $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  と定める. 点  $P_2$  は  $S_{u_3} \circ S_{u_1}$  の回転軸上にあるので,  $\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  としておく.  $\overrightarrow{OP_1}$  と  $\overrightarrow{P_1P_2}$  は直交するので,

$$(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{P_1P_2}) = \left( \begin{pmatrix} \frac{s+2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' - \frac{s+2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{9} \{(s+2)(3x' - s - 2) - 1\} = 0$$

であり, これを解くと  $x' = 1$  が導かれる. よって,  $\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  と定まる.

$\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} x'' \\ sx'' \\ 0 \end{pmatrix}$  としておくと,  $\overrightarrow{OP_1}$  と  $\overrightarrow{P_2P_3}$  は直交するので,

$$(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{P_2P_3}) = \left( \begin{pmatrix} \frac{s+2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' - 1 \\ sx'' \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} (s+2)(x'' - 1) = 0$$

であり, これを解くと  $x'' = 1$  が導かれる. よって,  $\overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$  と定まる.

すると, 立体  $OP_1P_2P_3$  は三角錐になっており, この三角錐を  $S_{u_1}$ ,  $S_{u_2}$ ,  $S_{u_3}$  とこれらの合成で写していくと, 正二十面体が形成される.

このようにして, 図2のコクセター図形と対応している立体が正二十面体であることがわかる.

## まとめ

オイラーの等式を用いた正多面体の決定方法は3次元に限られたものであるが、この鏡映を用いた決定方法は高次元の正多面体の決定にも利用できる。ただし、双対関係にあるものは同じコクセター図形で表される。

実際、有限鏡映群は図6のコクセター図形で与えられるものに限られることが知られており、基本になるルートベクトルの数は、考えている空間の次元と対応していることと、正多面体に対応するコクセター図形は枝分かれしない ( $\overrightarrow{OP_1}$ ,  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $\overrightarrow{P_2P_3}$  は互いに直交することから証明できる) ことを考慮すると、先ほどと同様の方法で高次元の正多面体を決定することができる。

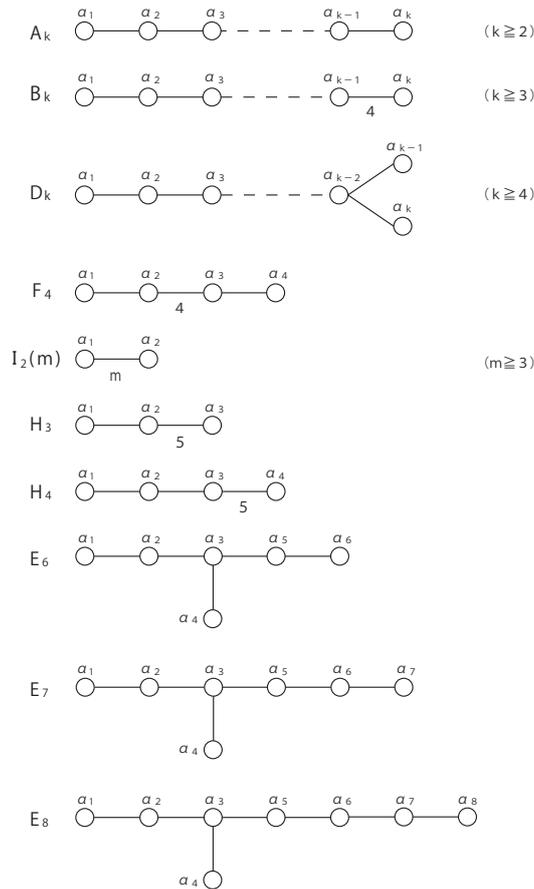


図6 有限鏡映群のコクセター図形

今回は、鏡映を用いた正多面体の決定方法を3次元の場合でしか考察できなかったため、次は4次元の場合についてももう少し考察してみたいと思う。

## 参考文献

- [1] 志賀弘典『数学の視界』, 数学書房, 2008
- [2] ハンス ヴァルサー (蟹江幸博 翻訳)『黄金分割』, 日本評論社, 2002
- [3] 岩崎克則「多面体調和関数の数理—多面体・不変式・偏微分方程式—」, 日本数学会 企画特別講演集, 2002 秋, p.80-94