

15 ゲームの群論的考察

影山美帆

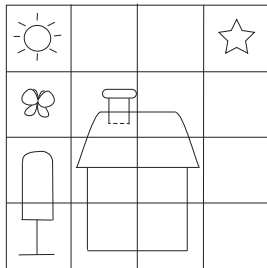
関西大学システム理工学部数学科

2012年2月16日

15 ゲームの主問題

問題

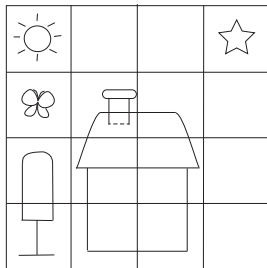
右の図において、全体の絵柄 (ちょうちょは除く) は変えずに、ちょうちょを1番右下のマス (地面) に移動させることはできるか？



15 ゲームの主問題

問題

右の図において、全体の絵柄 (ちょうちょは除く) は変えずに、ちょうちょを1番右下のマス (地面) に移動させることはできるか？



この問題を解決するには、どうすればいいだろうか？

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ とする.

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ とする.

定義 (置換)

n 文字の置換

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ とする.

定義 (置換)

n 文字の置換 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X$ から X への全単射な写像

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ とする.

定義 (置換)

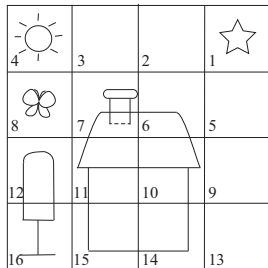
n 文字の置換 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X$ から X への全単射な写像

記号の説明

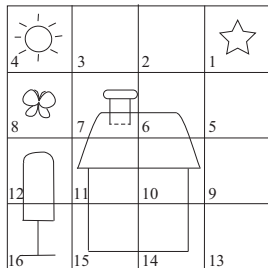
- $\mathfrak{S}_n = \{ n \text{ 文字の置換全体} \}$ を **n 次対称群** という.
- $\mathfrak{S}_n \ni \sigma$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad (i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, n\})$$

と表す.



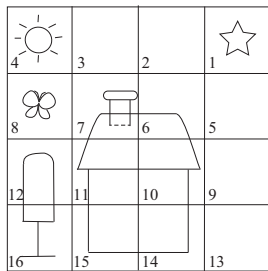
マス (席) → 3



マス (席) → 3

ピース → [3]

※ [1] は空のピースと考える



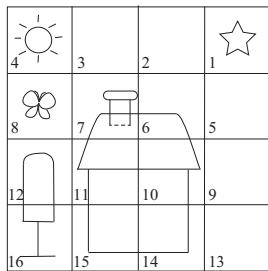
マス (席) → 3

ピース → [3]

※ [1] は空のピースと考える

- ・ピースの移動を置換を用いて表す

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$



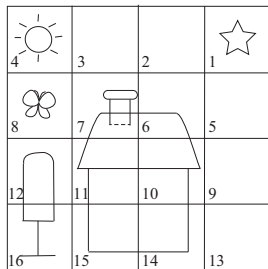
マス (席) → 3

ピース → [3]

※ [1] は空のピースと考える

- ・ピースの移動を置換を用いて表す

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$



考え方

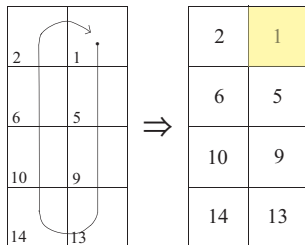
次のようなピースの入れ換えをする.

$$\left. \begin{array}{l} [8] \rightarrow [13] \\ [9] \rightarrow [8] \\ [13] \rightarrow [9] \end{array} \right\} \dots (*)$$

手段

i. [8],[9],[13],[1] を右上の田の字形に集める.

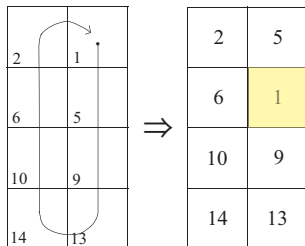
方法



手段

i. [8],[9],[13],[1] を右上の田の字形に集める.

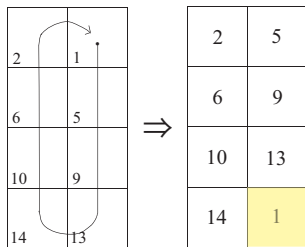
方法



手段

i. [8],[9],[13],[1] を右上の田の字形に集める.

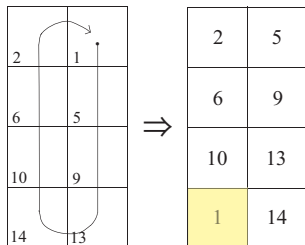
方法



手段

i. [8],[9],[13],[1] を右上の田の字形に集める.

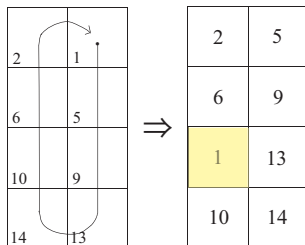
方法



手段

i. [8],[9],[13],[1] を右上の田の字形に集める.

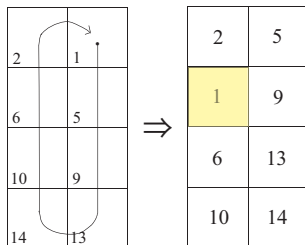
方法



手段

i. [8],[9],[13],[1] を右上の田の字形に集める.

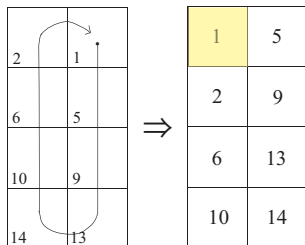
方法



手段

i. [8],[9],[13],[1] を右上の田の字形に集める.

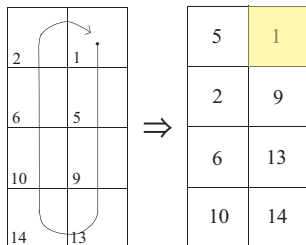
方法



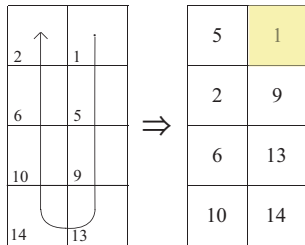
手段

i. [8],[9],[13],[1] を右上の田の字形に集める.

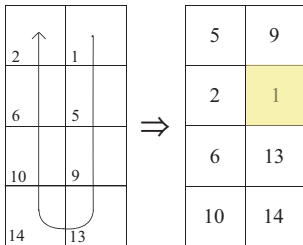
方法



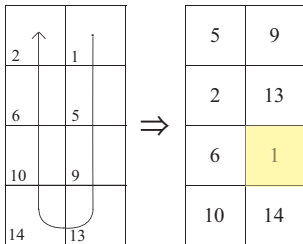
さらに、次のように動かす。



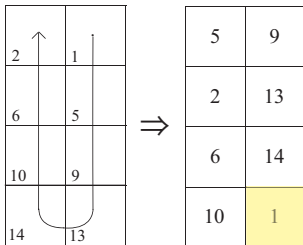
さらに、次のように動かす.



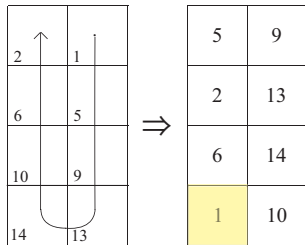
さらに、次のように動かす。



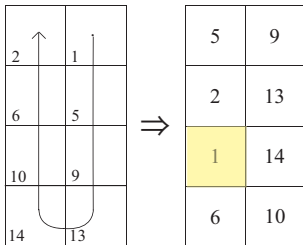
さらに、次のように動かす。



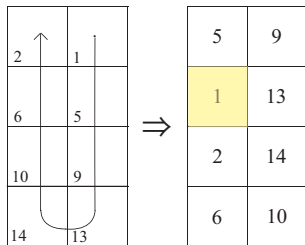
さらに、次のように動かす。



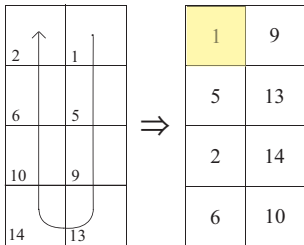
さらに、次のように動かす。



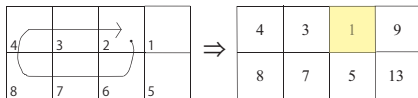
さらに、次のように動かす。



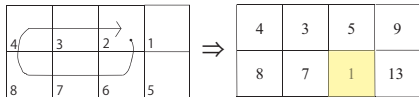
さらに、次のように動かす.



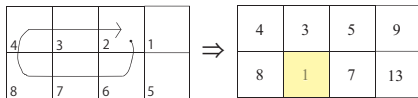
2,3,4,6,7,8 の席を使って, [1],[8] を田の字形に集める.



2,3,4,6,7,8 の席を使って, [1],[8] を田の字形に集める.



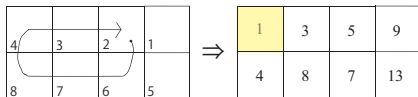
2,3,4,6,7,8 の席を使って, [1],[8] を田の字形に集める.



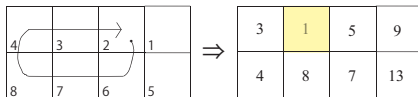
2,3,4,6,7,8 の席を使って, [1],[8] を田の字形に集める.



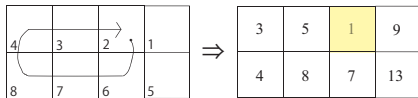
2,3,4,6,7,8 の席を使って, [1],[8] を田の字形に集める.



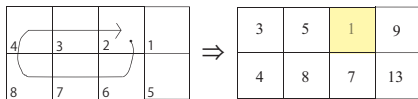
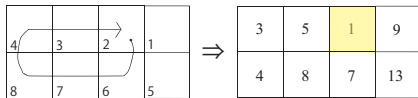
2,3,4,6,7,8 の席を使って, [1],[8] を田の字形に集める.



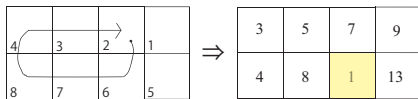
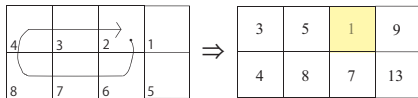
2,3,4,6,7,8 の席を使って, [1],[8] を田の字形に集める.



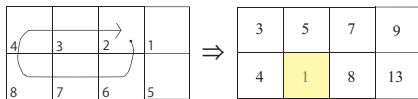
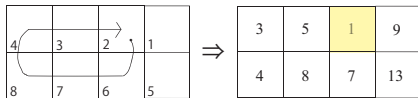
2,3,4,6,7,8 の席を使って, [1],[8] を田の字形に集める.



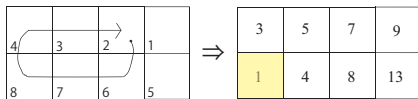
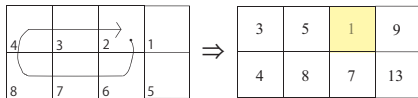
2,3,4,6,7,8 の席を使って, [1],[8] を田の字形に集める.



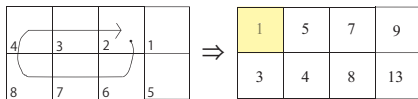
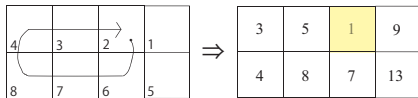
2,3,4,6,7,8 の席を使って，[1],[8] を田の字形に集める．



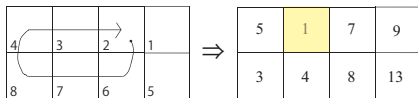
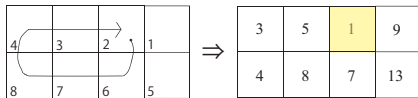
2,3,4,6,7,8 の席を使って, [1],[8] を田の字形に集める.



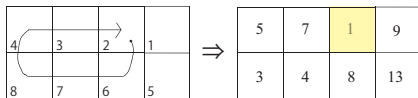
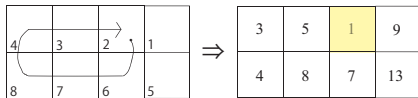
2,3,4,6,7,8 の席を使って，[1],[8] を田の字形に集める．



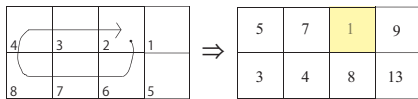
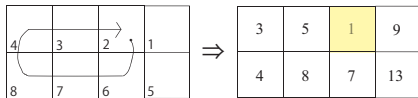
2,3,4,6,7,8 の席を使って，[1],[8] を田の字形に集める．



2,3,4,6,7,8 の席を使って，[1],[8] を田の字形に集める．



2,3,4,6,7,8 の席を使って, [1],[8] を田の字形に集める.



$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 13 & 14 \\ 2 & 10 & 8 & 7 & 4 & 14 & 3 & 6 & 1 & 13 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

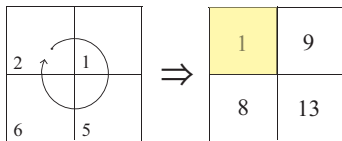
τ によって、右の図のように
[8],[9],[13],[1] が田の字形に集まった.

2	1	1	9
6	8	5	13

τ によって、右の図のように
[8],[9],[13],[1] が田の字形に集まった.

2	1	1	9
6	8	5	13

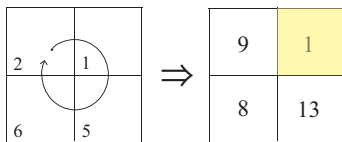
ii. (*) の入れ換えをする.



τ によって、右の図のように
[8],[9],[13],[1] が田の字形に集まった.

2	1	9
6	8	13
		5

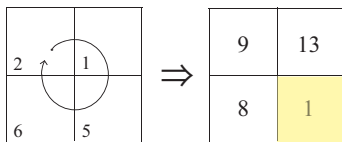
ii. (*) の入れ換えをする.



τ によって、右の図のように
[8],[9],[13],[1] が田の字形に集まった.

2	1	9
6	8	13
		5

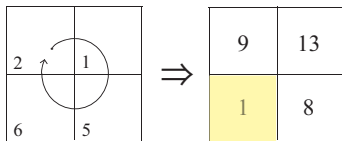
ii. (*) の入れ換えをする.



τ によって、右の図のように
[8],[9],[13],[1] が田の字形に集まった.

2	1	9	1
6	8	13	5

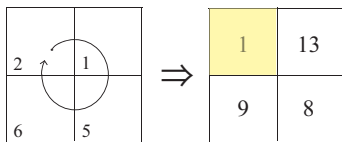
ii. (*) の入れ換えをする.



τ によって、右の図のように
[8],[9],[13],[1] が田の字形に集まった.

2	1	9
6	8	13
		5

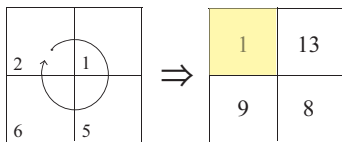
ii. (*) の入れ換えをする.



τ によって、右の図のように
 [8],[9],[13],[1] が田の字形に集まった.

2	1	9
6	8	13
		5

ii. (*) の入れ換えをする.

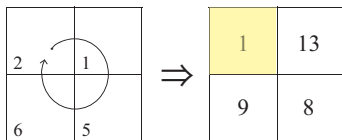


$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

τ によって、右の図のように
 $[8],[9],[13],[1]$ が田の字形に集まった.

2	1	1	9
6	8	5	13

ii. (*) の入れ換えをする.



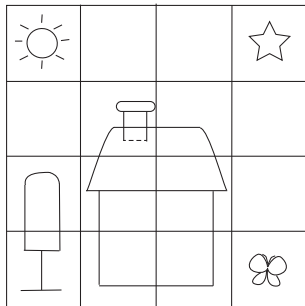
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

iii. 最後に i と逆操作を行う.

$$\tau^{-1}\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 13 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 13 & 8 & 10 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\tau^{-1}\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 13 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 13 & 8 & 10 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

よって、
右の図のように“ちょうちょ”を
地面に移動させることができた。



$$\tau^{-1}\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 13 & 14 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 13 & 8 & 10 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

よって、
右の図のように“ちょうちょ”を
地面に移動させることができた。

15 ゲームの問題が
解決できた数学的根拠

定理

15 ゲームは解ける

⇔ 対応する置換が偶置換

