重　心

2005.12.22

重心問題 解法虎の巻

1. 半円·4分円

2. 円弧

3. 扇形

4. 半球殻

5. 半球体

6. 厚みのある半球殻

7. 三角形

8. 円錐

9. 円錐台

10. 穴あき板

11. 空洞のある半球ボール

重心問題 解法虎の巻

関西大学工学部物理学教室
齊藤　正

重心を求める場合、2 質点系の重心の求め方が基本。実際の物体では連続体であるので、積分形式で求める場合が多い。これらの式は 3 次元のベクトル形式で書かれている通り、1 つの式は実際にはx、y、zに関する 3 つの式を意味している。

※対称性に注意すると、必ずしもx、y、zに関する3つの式を計算する必要はないことが多い。

$\boxed{\text{2質点系の重心}}$

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$\boxed{\text{n質点系の重心}}$

$$\vec{r}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i$$

※組み合わせ構造では、① 各部分の重心を求め、② 各部分の重心に各々の質量が集中している多質点系と見なして求める。

※穴あき構造では、穴の部分をマイナスの質量として扱う。

$\boxed{\text{連続体の重心}}$

$$\vec{r}_G = \frac{\int \rho(\vec{r})\vec{r}\,\mathrm{d}V}{\int \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V}$$

（ρは体積密度、dVは微小体積）

座標は、物体の形状に応じて、極座標や円筒座標を用いる。質量が線状分布、面状分布の場合にはそれぞれ線密度τ、面密度σを使い、dVを ds、dS に置き換えて、線積分、面積分を行う。ただし、密度が一定な場合には、積分の外に出てしまうので、密度を1として計算してもかまわない。線積分、面積分、体積積分では、微小長、微小長方形、微小直方体の各辺を積分変数で表して、正しく積分変数の変換を行うことがポイント。

重心(質量中心)を求める　半円･4分円

密度が一様な半径 a の薄い半円および4分円の板の質量中心を求めよ。

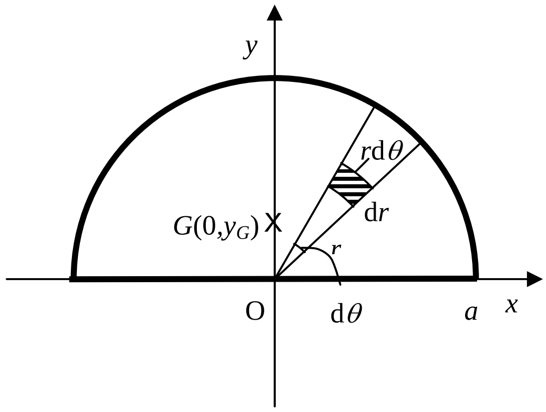
〔半円〕

質量中心は対称軸(y軸)上にあるから $x_G=0$ である。x 軸からの距離 y_G を求めれば良い。2次元極座標で面積分を行うと

$$dS = rdrd\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$y_G = \frac{\int \sigma y dS}{\int \sigma dS} = \frac{\sigma\int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta}{\sigma\int_0^a rdr\int_0^\pi d\theta}$$ を得る。

$$= \frac{\frac{a^3}{3}\left[-\cos\right]_0^\pi}{\frac{a^2}{2}\pi} = \frac{4a}{3\pi}$$



〔4分円〕

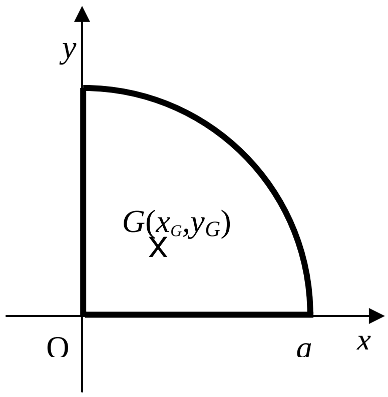
対称性から半円と4分円の重心は同じであることがわかるが、計算すると以下のようになる。

図のように置くと y については半円のときと同様に

$$dS = rdrd\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$y_G = \frac{\int \sigma y dS}{\int \sigma dS} = \frac{\sigma\int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta}{\sigma\int_0^a rdr\int_0^{\pi/2} d\theta}$$

$$= \frac{\frac{a^3}{3}\left[-\cos\right]_0^{\pi/2}}{\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$



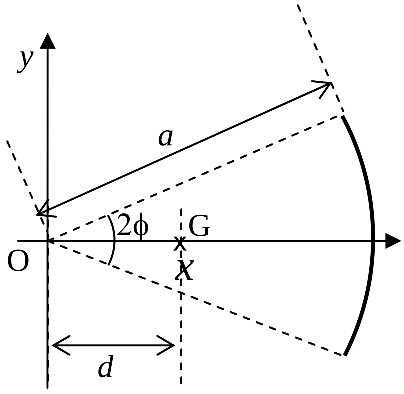
x と y の対称性を考慮すれば、x についても y と同じになることがわかるが、あえて計算すれば、以下の通り。

$$x_G = \frac{\int \sigma x dS}{\int \sigma dS} = \frac{\sigma\int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta}{\sigma\int_0^a rdr\int_0^{\pi/2} d\theta} = \frac{4a}{3\pi}$$

重心(質量中心)を求める　円弧

密度が一様で半径 a, 中心角 2ϕの円弧の重心 G と中心点 O との距離 d を求めよ.

2 次元極座標で線積分する。対象性より重心がx軸上にある(y_G=0)のは明確であるから、x_Gを求める。



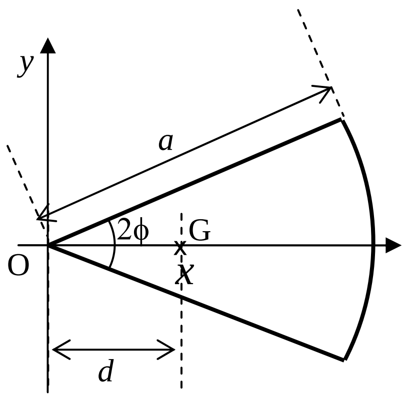
$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= a\mathrm{d}\theta \\
x &= a\cos\theta \\
x_G &= \frac{\int x \cdot a\mathrm{d}\theta}{\int a\mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{a^2 \int_{-\phi}^{\phi} \cos\theta \mathrm{d}\theta}{a\int_{-\phi}^{\phi} \mathrm{d}\theta} \\
&= \frac{2a\sin\phi}{2\phi}
\end{aligned}
$$

$$\therefore d = \frac{a\sin\phi}{\phi}$$

重心(質量中心)を求める　扇形

密度が一様で半径 a，中心角 2ϕ の扇形の重心 G と中心点 O との距離 d を求めよ．

2 次元極座標で面積分する。対称性より重心が x 軸上にある(y_G=0)のは明確であるから、x_G を求める。



$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \cdot r\mathrm{d}\theta = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$x = r\cos\theta$$

$$x_G = \frac{\int x\sigma \mathrm{d}S}{\int \sigma \mathrm{d}S}$$

$$= \frac{\sigma\int r\cos\theta \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\sigma\int r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

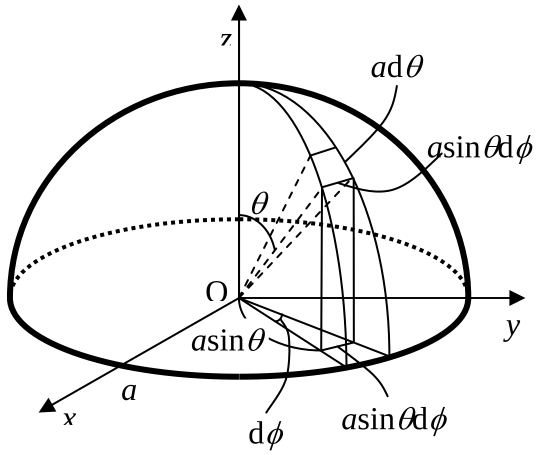
$$= \frac{\int_0^a r^2\mathrm{d}r \int_{-\phi}^{\phi}\cos\theta \mathrm{d}\theta}{\int_0^a r\mathrm{d}r \int_{-\phi}^{\phi}\mathrm{d}\theta}$$

$$\therefore d = \frac{\frac{a^3}{3}\cdot 2\sin\phi}{\frac{a^2}{2}\cdot 2\phi} = \frac{2a}{3}\frac{\sin\phi}{\phi}$$

重心(質量中心)を求める 半球殻

密度が一様な半径 a の薄い半球殻の質量中心を求めよ。

底面の中心に垂直に z 軸をとると、対称性から、質量中心は z 軸上にある。面密度をσとすると、



$$\mathrm{d}S = a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi, \quad z = a\cos\theta$$

$$z_G = \frac{\int \sigma z \mathrm{d}S}{\int \sigma \mathrm{d}S}$$

$$= \frac{\sigma a^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta}{\sigma a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta}$$

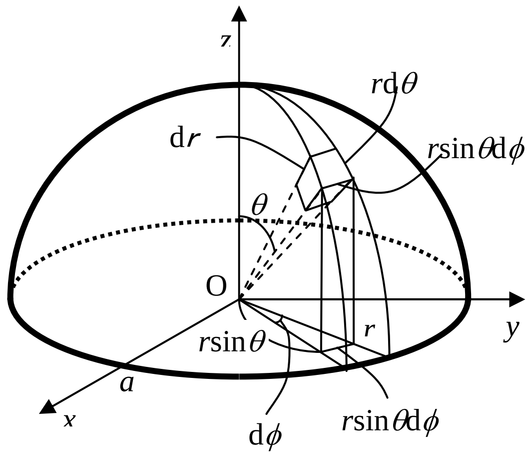
$$= \frac{a\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2} \mathrm{d}\theta}{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}}$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{a}{2}$$

重心(質量中心)を求める　半球体

密度が一様な半径 a の半球体の質量中心を求めよ。

底面の中心に垂直にz軸をとると、対称性から、質量中心はz軸上にある。密度をρとすると、



$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\quad z = r\cos\theta$$

$$z_G = \frac{\int \rho z\mathrm{d}V}{\int \rho\mathrm{d}V}$$

$$= \frac{\rho\int_0^a r^3 dr\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\rho\int_0^a r^2 dr\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta}$$

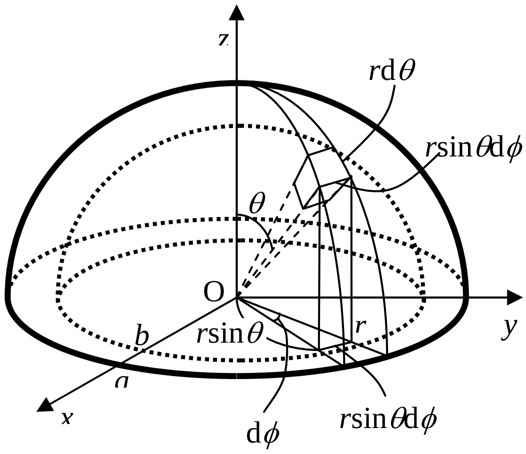
$$= \frac{\frac{a^4}{4}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}}{\frac{a^3}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}}$$

$$= \frac{3a}{8}$$

重心(質量中心)を求める　厚みのある半球

外径a、内径bの厚い半球殻の重心を求めよ。

半径aの球と半径bの球の重心を求めればよい。各々の重心は半球体の重心であるから、$\frac{3}{8}a, \frac{3}{8}b$である。また、各々の質量は、密度を$\rho$として、$\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi\rho a^3 = \frac{2}{3}\pi\rho a^3$、$\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi\rho b^3 = \frac{2}{3}\pi\rho b^3$である。内球の部分の質量を負として扱えば、以下のように重心が求められる。



$$x_G = \frac{\frac{2}{3}\pi\rho a^3 \cdot \frac{3}{8}a - \frac{2}{3}\pi\rho b^3 \cdot \frac{3}{8}b}{\frac{2}{3}\pi\rho a^3 - \frac{2}{3}\pi\rho b^3}$$

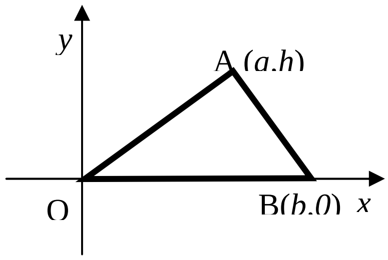
$$= \frac{\frac{3}{8}\left(a^4 - b^4\right)}{a^3 - b^3}$$

$$= \frac{3}{8}\frac{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{a^2+ab+b^2}$$

重心(質量中心)を求める　三角形

密度が一様な薄い三角形の質量中心を求めよ。

三角形の各頂点の座標を、O$(0,0)$、$A(a,h)$、$B(b,0)$とすると、OA、AB の各直線は、次のようになる。



$$\text{OA}:\quad x=\frac{a}{h}y,\qquad \text{AB}:\quad x=b-\frac{b-a}{h}y$$

したがって、積分範囲として、$x:\frac{a}{h}y\to b-\frac{b-a}{h}y$、$y:0\to h$をとればよい。また、重心を求める公式の分母は三角形の面積であるから、$bh/2$となる。したがって、

$$\frac{bh}{2}x_G=\int x\mathrm{d}S=\int_{\frac{a}{h}y}^{b-\frac{b-a}{h}y}x\mathrm{d}x\int_0^h\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^h\left[\left(b-\frac{b-a}{h}y\right)^2-\left(\frac{a}{h}y\right)^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^h\left[b^2-\frac{2b(b-a)}{h}y+\frac{b(b-2a)}{h^2}y^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left(b^2h-b(b-a)h+\frac{b(b-2a)}{3}h\right)=\frac{h}{6}b(a+b)$$

$$\therefore x_G=\frac{a+b}{3}$$

$$\frac{bh}{2}y_G=\int y\mathrm{d}S=\int_{\frac{a}{h}y}^{b-\frac{b-a}{h}y}\mathrm{d}x\int_0^h y\mathrm{d}y$$

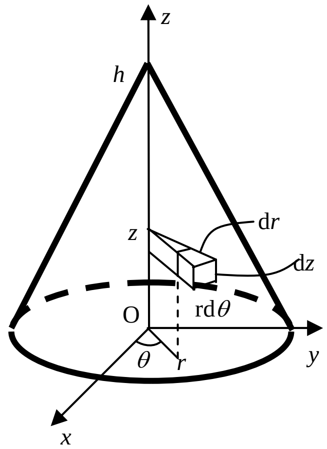
$$=\frac{1}{2}\int_0^h\left(b-\frac{b-a}{h}y-\frac{a}{h}y\right)y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{b}{h}\left[\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\mathrm{h}}=\frac{b}{h}\left(\frac{h^3}{2}-\frac{1}{3}h^3\right)=\frac{bh^2}{6}$$

$$\therefore y_G=\frac{h}{3}$$

重心(質量中心)を求める　円錐

底面の半径が a、高さが h の密度が一様な直円錐の質量中心を求めよ。



底面の中心を原点とし、右図のように各座標を設定する。対称性から重心はz軸上にあることは明らか。高さzの位置でz軸に垂直に切ったときの切り口の円の半径を r_0 とすると、

$$r_0 = \frac{a}{h}(h - z)$$

である。円筒座標で考えると、

$$\mathrm{d}V = \mathrm{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{dz}$$

したがって、重心のz座標 z_G は以下のように求まる。

$$z_G = \frac{\int \rho \mathrm{z}\mathrm{d}V}{\int \rho \mathrm{d}V}$$

$$= \frac{\int_0^{r_0} \mathrm{r}\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^h \mathrm{zdz}}{\int_0^{r_0} \mathrm{r}\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^h \mathrm{dz}}$$

$$= \frac{\int_0^h \frac{{r_0}^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2\pi} \cdot \mathrm{zdz}}{\int_0^h \frac{{r_0}^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2\pi}\mathrm{dz}}$$

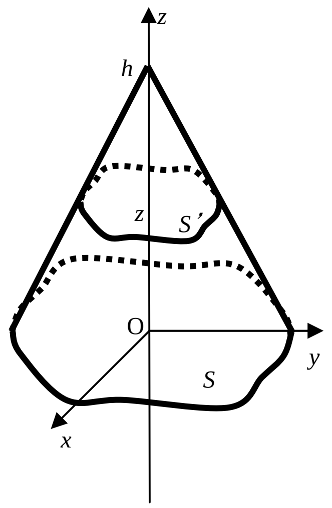
$$= \frac{\int_0^h \frac{\cancel{a}^2}{\cancel{h}^2}(h-z)^2 \cdot \mathrm{zdz}}{\int_0^h \frac{\cancel{a}^2}{\cancel{h}^2}(h-z)^2 \mathrm{dz}}$$

$$= \frac{\left[\frac{h^2 z^2}{2} - \frac{2hz^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right]_0^h}{\left[h^2 z - hz^2 + \frac{z^3}{3}\right]_0^h} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{1 - 1 + \frac{1}{3}} h = \frac{1}{4} h$$

重心(質量中心)を求める　多角錐

高さが h の密度が一様な多角錐の質量中心が底面から $h/4$ にあることを示せ。

底面上に原点をとり、右図のように各座標を設定する。底面積を S 、高さzの位置でz軸に垂直に切った断面積をS'とすると、



$$S'=\left(\frac{h-z}{h}\right)^2 S$$

である。重心のz座標 z_G は以下のように求まる。

$$z_G=\frac{\int_0^h S'\,\mathrm{z}\mathrm{d}\mathrm{z}}{\int_0^h S'\,\mathrm{d}\mathrm{z}}$$

$$=\frac{\int_0^h \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 S\mathrm{z}\mathrm{d}\mathrm{z}}{\int_0^h \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 S\mathrm{d}\mathrm{z}}$$

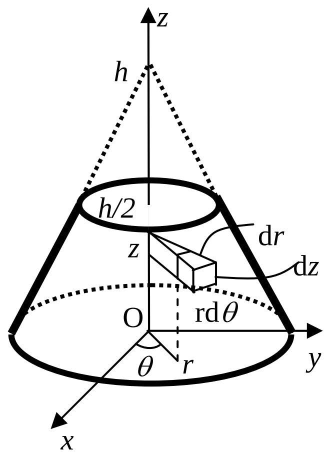
$$=\frac{\frac{1}{h^2}\int_0^h \left(h^2\mathrm{z}-2hz+z^3\right)\mathrm{d}\mathrm{z}}{\frac{h}{3}}$$

$$=\frac{h}{4}$$

重心(質量中心)を求める　円錐

底面の半径がa、高さがhの直円錐の頂点から$h/2$切り取った円錐台の重心を求めよ。

〔解答1〕



底面の中心を原点とし、右図のように各座標を設定する。対称性から重心はz軸上にあることは明らか。高さzの位置でz軸に垂直に切ったときの切り口の円の半径をr_0とすると、

$$r_0 = \frac{a}{h}(h - z)$$

である。円筒座標で考えると、

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

したがって、重心のz座標z_Gは以下のように求まる。

$$z_G = \frac{\int \rho z \mathrm{d}V}{\int \rho \mathrm{d}V}$$

$$= \frac{\int_0^{r_0} r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{h/2} z\mathrm{d}z}{\int_0^{r_0} r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{h/2} \mathrm{d}z}$$

$$= \frac{\int_0^{h/2} \frac{r_0^2}{2} \cdot 2\pi \cdot z\mathrm{d}z}{\int_0^{h/2} \frac{r_0^2}{2} \cdot 2\pi \mathrm{d}z}$$

$$= \frac{\int_0^{h/2} \frac{a^2}{h^2}(h-z)^2 \cdot z\mathrm{d}z}{\int_0^{h/2} \frac{a^2}{h^2}(h-z)^2 \mathrm{d}z}$$

$$= \frac{\left[\frac{h^2 z^2}{2} - \frac{2hz^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right]_0^{h/2}}{\left[h^2 z - hz^2 + \frac{z^3}{3}\right]_0^{h/2}} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{64}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24}} h = \frac{11}{56} h$$

〔解答2〕

高さhの円錐の重心は底面から$h/4$の位置にある。円錐台を大きな円錐から小さな円錐を切り取ったと考えて、2物体の重心を合成して求めることが出来る。

小円錐の質量をmとすると大円錐の質量は$8m$となる。円錐台の底面の中心を原点とすると、大円錐の重心は$(0,0,h/4)$、小円錐の重心は$(0,0,5h/8)$となる。小円錐の質量を負と考えて合成する

と、

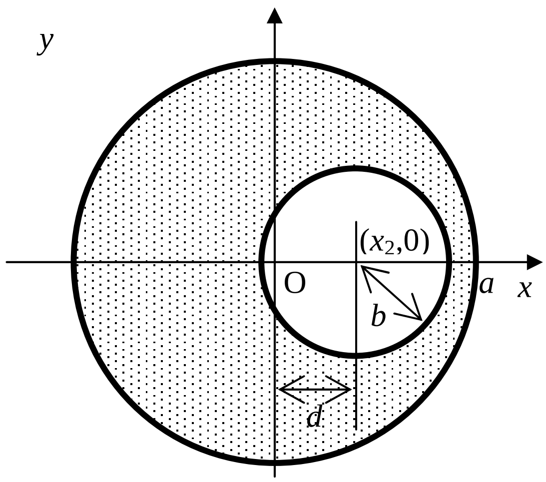
$$z_G = \frac{8m \cdot \frac{h}{4} - m \cdot \frac{5}{8}h}{8m - m}$$

$$= \frac{11}{56}h$$

重心（質量中心）を求める　穴あき板

(i) 半径 a，面密度 ρの一様な円板の中心から距離 d の点を中心とし，半径 $b\ (2b < a)$の円形の穴をつくるとき重心の位置を求めよ．

(ii)穴の部分に面密度σの円板をうめこむとどうなるか．



(i) 穴の部分の質量を負と考えればよい。

2 質点の重心の公式は

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

ここで、原点Oのx座標をx_1とすれば、

$$m_1 = \pi\rho a^2$$
$$m_2 = \pi\rho b^2$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = d$$

となり、

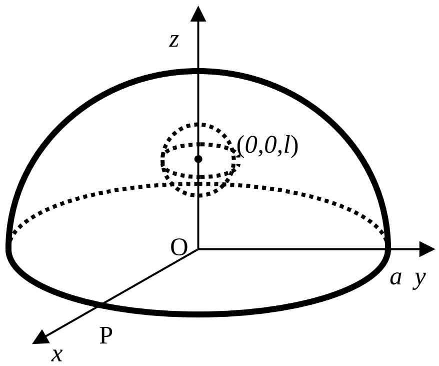
$$x_G = \frac{-\pi\rho b^2 d}{\pi\rho\left(a^2 - b^2\right)} = -\frac{b^2 d}{a^2 - b^2}$$

(ii) 同様に、穴の部分に別の重さ（面密度σ）のものが入ったのであるから、穴が開いた状態の重心位置と穴の中心位置に 2 質点があると考えて、

$$x_G = \frac{\pi\rho\left(a^2 - b^2\right)\left(-\dfrac{b^2 d}{a^2 - b^2}\right) + \pi\sigma b^2 d}{\pi\rho\left(a^2 - b^2\right) + \pi\sigma b^2} = \frac{b^2 d(\sigma - \rho)}{\rho\left(a^2 - b^2\right) + \sigma b^2}$$

重心(質量中心)を求める　空洞のある半球ボール

密度ρの材料でできた半径 a の球形ボールの中に球状の空洞が空いている。ボールを水中に入れたときに鉛直となる方向を z 軸とし、ボールの中心を原点として z 軸と直交するように x、y 軸を設定する。ボールを xy 面で切断して半球状としたとき、ボールの質量が $4\pi\rho\left(a^3/2-b^3\right)/3$ であった。半球体の底面の縁にある点 P で吊るしたところ、底面と鉛直のなす角はθであった。ボールの中心と空洞の中心との距離lを求めよ。

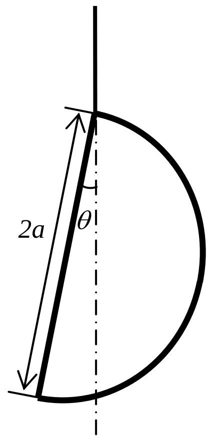


空間のない半球体ボールの質量m_1を、空洞と同じ大きさのボールの質量m_2をとすると、

$$m_1=\frac{2}{3}\pi\rho a^3\text{、}m_2=\frac{4}{3}\pi\rho b^3$$

重心の座標を$(0,z_G)$とすると、吊るしたときの鉛直面と底面とのなす角から、

$$z_G=a\tan\theta$$



また、この重心はm_1と$-m_2$の重心と考えると、半球体の重心が$\dfrac{3}{8}a$であるから

$$z_G=\frac{m_1\dfrac{3}{8}a-m_2l}{m_1-m_2}$$

$$\therefore l=\frac{\dfrac{3}{8}m_1a-(m_1-m_2)z_G}{m_2}$$

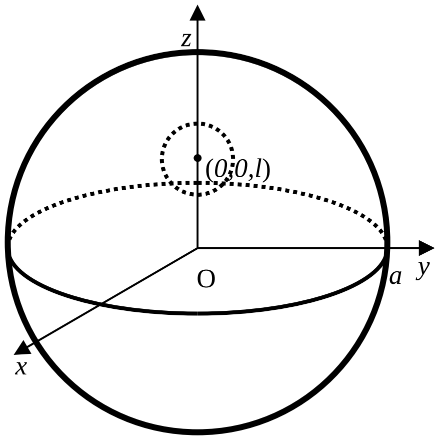
$$=\frac{3m_1}{8m_2}a-\frac{m_1-m_2}{m_2}z_G$$

$$=\frac{3\dfrac{2}{3}\pi\rho a^3}{8\dfrac{4}{3}\pi\rho b^3}a-\frac{\dfrac{2}{3}\pi\rho a^3-\dfrac{4}{3}\pi\rho b^3}{\dfrac{4}{3}\pi\rho b^3}z_G$$

$$=\frac{3a^4}{16b^3}-\frac{a^3-2b^3}{2b^3}a\tan\theta$$

重心(質量中心)を求める　空洞のあるボール

密度ρの材料でできた半径 a の球形ボールの中に球状の空洞が空いている。ボールを水中に入れたときに鉛直となる方向を z 軸とし、ボールの中心を原点として z 軸に直交するように x、y 軸を設定する。ボールの質量が $4\pi\rho\left(a^3-b^3\right)/3$ であり、重心の位置が $\left(0,0,z_G\right)$ であるとき、ボールの中心と空洞の中心の距離 l を求めよ。



空間のないボールの質量 m_1 を、空洞と同じ大きさのボールの質量 m_2 をとすると、

$$m_1=\frac{4}{3}\pi\rho a^3 \text{、} m_2=\frac{4}{3}\pi\rho b^3$$

空洞の中心を $\left(0,0,c\right)$ とすると、

$$z_G=\frac{-m_2c}{m_1-m_2}$$

$$\therefore c=\frac{m_2-m_1}{m_2}z_G$$

$$=\frac{\frac{4}{3}\pi\rho b^3-\frac{4}{3}\pi\rho a^3}{\frac{4}{3}\pi\rho b^3}z_G$$

$$=\left(1-\frac{a^3}{b^3}\right)z_G$$

$$l=\left|c\right|=\left(\frac{a^3}{b^3}-1\right)z_G\cdot\cdot\cdot\left(\because a>b\right)$$