IS3-6 領域ベースの潜在変数を用いた画像の修復と領域分割 ー 変分法に基づくベイズ推定 ー

三好 誠司（関西大）　岡田 真人（東大，理研）

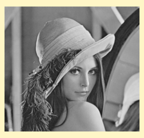
結 論 領域ベースの潜在変数と変分推論法を用いて画像の修復と領域分割を同時に行う決定論的なアルゴリズムを導出した．ハイパーパラメータの推定や，ラベル数に関するモデル選択も自動で行う．人工画像や自然画像を用いた実験により，一枚の劣化画像だけから良好な修復と領域分割が行えることを確認した

背　景

$$\underset{\text{事後分布}}{p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})} = \frac{\overset{\text{尤度}}{p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}\ \overset{\text{事前分布}}{p(\boldsymbol{x})}}{p(\boldsymbol{y})}$$

ベイズの定理

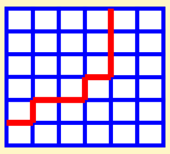
- マルコフ確率場（MRF）に基づく画像処理においてはベイズ推定がよく用いられる
- 事前分布として素朴な滑らかさ制約をおくとエッジの表現が難しい



エッジがある

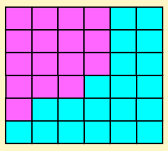
- 潜在変数の導入が有効．潜在変数には二種類がある

境界ベース（ラインプロセス）



$\eta_{ij} = 1$ （エッジ）
$\eta_{ij} = 0$ （エッジではない）

領域ベース（ラベルプロセス）



$\xi_i = 1$ （領域1）
$\xi_i = 2$ （領域2）

目　的

鶏と卵の問題

- ラベルプロセスと変分推論法を用いて画像の修復と領域分割を同時に行う決定論的なアルゴリズムを導出
- ハイパーパラメータ推定（原画像のスムースネスや雑音の分散を自動推定）
- モデル選択（ラベル数の自動推定）

手　法　　変分推論法

1. 原画像$\boldsymbol{x}$とラベル $\boldsymbol{\Xi} = \{\boldsymbol{\xi}_i\}$に関する事前分布

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Xi}|\rho) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\rho E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Xi})\right)$$

ボルツマン分布

$$E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Xi}) = \frac{1}{2}\sum_{l\sim m}\left(\boldsymbol{\xi}_l\cdot\boldsymbol{\xi}_m(x_l - x_m)^2 + (1 - \boldsymbol{\xi}_l\cdot\boldsymbol{\xi}_m)\lambda\right)$$

隣接する画素が同じラベルの時は画素値がそれほど違わない．異なるラベルのときは画素値が大きく違ってもよい

$$\boldsymbol{\xi}_i \in \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$$

K個のK次元ベクトル
1-of-K表現のポッツスピン

2. 尤度

$$p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \beta) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{\beta}{2}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2\right)$$

逆分散βのガウス雑音が重畳

3. 事後分布 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Xi}, \rho, \beta|\boldsymbol{y})$の代理として試験分布を導入

$$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Xi}, \rho, \beta) = q(\boldsymbol{x})\left[\prod_i q_i(\boldsymbol{\xi}_i)\right]q(\rho)q(\beta)$$

因子化仮定

4. KL距離最小という意味で事後分布に最も近い試験分布を変分法で導出

$$\mathrm{KL} = \sum_{\boldsymbol{\Xi}}\int d\boldsymbol{x}d\rho d\beta\, q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Xi}, \rho, \beta)\ln\frac{q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Xi}, \rho, \beta)}{p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Xi}, \rho, \beta|\boldsymbol{y})}$$

qとpのKL距離

$$\mathcal{F} = -\sum_{\boldsymbol{\Xi}}\int d\boldsymbol{x}d\rho d\beta\ q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Xi}, \rho, \beta)\ln\frac{p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Xi}, \rho, \beta)}{q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Xi}, \rho, \beta)}$$

変分自由エネルギー

$$\mathrm{KL} = \mathcal{F} + \ln p(\boldsymbol{y})$$

ln p(y)は定数なので F を最小にすればよい！

最終的に得られる最適試験分布（これらを反復法で数値的に解く）

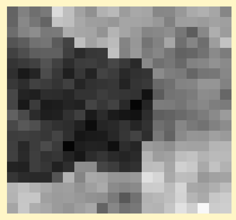
$$q_i^*(\boldsymbol{\xi}_i) \propto \exp\left(\sum_{j\in\mathcal{N}(i)}\frac{\langle\rho\rangle}{2}\boldsymbol{\xi}_i\cdot\langle\boldsymbol{\xi}_j\rangle\left(\lambda - \langle(x_i - x_j)^2\rangle\right)\right)$$

$$q^*(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Gauss}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$
$$q^*(\rho) = \mathrm{Gamma}(\rho|a_\rho, b_\rho),$$
$$q^*(\beta) = \mathrm{Gamma}(\beta|a_\beta, b_\beta)$$

結果と考察

1. 人工画像の場合

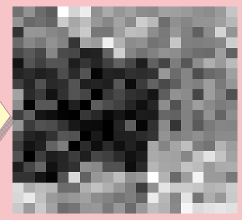
真のラベル $\boldsymbol{\Xi}$
(K = 3)



原画像 $\boldsymbol{x}$
(ρ = 100)

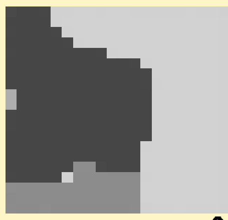
モンテカルロ法で生成

ノイズ

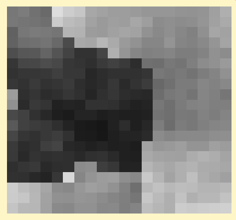


観測画像 $\boldsymbol{y}$
(β = 100)

$\boldsymbol{y}$ だけ使って推定

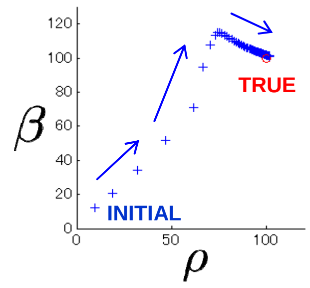


推定されたラベル$\hat{\boldsymbol{\Xi}}$



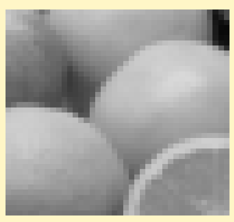
修復画像 $\hat{\boldsymbol{x}}$
(ISNR=4.68dB)

- ラベルがよく推定されている．それに対応して原画像のエッジがよく推定されている
- 原画像の領域内のスムースネスがよく推定されている
- ラベル数K=3が推定された（変分自由エネルギー F の最小値を最小にするモデルを選択）



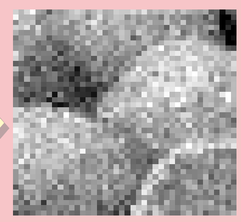
ハイパーパラメータ推定のようす

2. 自然画像の場合



原画像 $\boldsymbol{x}$

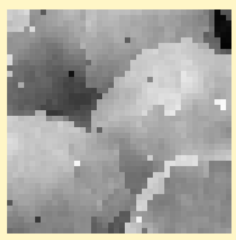
ノイズ



観測画像 $\boldsymbol{y}$
(β = 100)

$\boldsymbol{y}$ だけ使って推定

推定されたラベル$\hat{\boldsymbol{\Xi}}$



修復画像 $\hat{\boldsymbol{x}}$
(ISNR = 5.06dB)

- 推定されたβ は151
- 物体のエッジがよく復元されている
- ノイズがよく除去されている