

レプリカ法を用いたソーラス符号の解析

田所 大昂[†] 三好 誠司[‡][†] 関西大院 理工学研究科 [‡] 関西大 システム理工

{ k608333 | miyoshi } @kansai-u.ac.jp

1 まえがき

我々が情報を伝送する場合，通信路に雑音が存在するために送信データと受信データは必ずしも一致しているとは限らない．受信側は送信側の真の送信ビット列を知らないため受信ビット列のどの部分が正しくてどの部分が誤っているのかを推定することは困難である．そこで一般には元の情報をそのまま送信するのではなくどのビットが誤っているかが判別できるように情報に冗長性を付加する通信路符号化を行ってから情報を送信し，受信側は受信した情報と冗長性のルールをうまく利用して元の情報を推定し復号を行う．

Shannon が 1948 年に誤り訂正能力の理論的な性能上限（シャノン限界）を示して以来，シャノン限界に可能な限り近づく符号化法の研究がなされている．シャノン限界を漸近的に満たす符号の一つに Sourlas が提唱したソーラス符号があり [1]，ソーラス符号に関する様々な研究がなされている [2]．

ところで，ランダムな相互作用を有する多体系を解析するために統計力学分野で開発された強力な手法としてレプリカ法 [3, 4] が知られている．レプリカ法は恒等式 $\log Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n}$ を基本として，ビット数 $N \rightarrow \infty$ と $n \rightarrow 0$ の極限操作の入れ替え， Z^n の計算結果における n の自然数から実数への解析接続，Hubbard-Stratonovich 変換，レプリカ対称性の仮定，鞍点法 [5] による積分評価といった様々な計算技術から構成される解析手法である．

本稿では加法的白色ガウス雑音 (AWGN) 通信路におけるソーラス符号の誤り訂正能力についてレプリカ法を用いた理論解析による評価を行う．2 体 ($K = 2$) のソーラス符号についてレプリカ法を用いて理論式を導出し，導出した式を数値的に解き，加法的白色ガウス雑音 (AWGN) 通信路における理論値を求め，計算機実験を行い計算機実験と理論の結果の比較を行う．その結果計算機実験の結果と理論計算の結果は比較的良く一致し，西森温度 [3] で復号の良さが最大になること，ビット数が大きくなると試行毎のばらつきが小さくな

ることが示される．3 体以上のソーラス符号については計算機実験は計算量的困難のため実行することができなかったため理論計算のみを行う．その結果 K の値が増加すると復号の良さが大きくなることが示される．

2 ソーラス符号と AWGN 通信路

ソーラス符号は情報の誤りを検出しそれを訂正する符号（誤り訂正符号）の一種であり，送りたい情報のかわりにそのパリティを送る． K 体のソーラス符号においては， N ビットのメッセージ $\xi \equiv \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$, $\xi_i \in \{+1, -1\}$ から K 個のビットを選びその積をパリティとする [1]．それを全通りについてとったものがソーラス符号であり， $\prod_{k \in \lambda} \xi_k$ と表される．ここで， $\lambda = 1, 2, \dots, \binom{N}{K}$ はパリティのインデックスであり， λ は λ 番目のパリティを生成するために掛け合わされるメッセージビットのインデックスの組である．図 1 に $K = 2$ の例を示す．

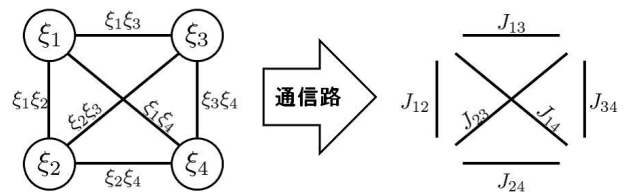


図 1: 2 体ソーラス符号の符号語生成，雑音の重畳

図 1 で $\xi_1 \dots \xi_4$ は送信したいメッセージであり， $\binom{4}{2}$ 個の組み合わせの数だけメッセージの積をとりパリティを作成している．

一般に送信信号は通信路において雑音の影響を受けるが，ソーラス符号のビット誤り率を最小にするためには受信側において西森温度で有限温度復号 (MPM 復号) を行えばよい．さらにソーラス符号に関しては $N \rightarrow \infty$ の極限でさらに $K \rightarrow \infty$ とするとき，漸近的にシャノン限界を達成する [1]．

本稿では主に 2 体のソーラス符号について扱う。また、加法的白色ガウス雑音 (AWGN) のある通信路を考える。送信信号の強さ J_0 、ガウス雑音の分散 J^2 に関しては標準的な正規化を行い、メッセージが ξ のときの受信信号 $\mathbf{J} = \{J_{ij}\}$ の確率密度は

$$P(\mathbf{J}|\xi) = \left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(J_{ij} - \frac{2J_0}{N}\xi_i\xi_j)^2}{\frac{2J^2}{N}}\right\} \quad (1)$$

であるとする [3]。

3 有限温度復号

復号を行うために \mathbf{J} が与えられたときの ξ についての条件付き確率 $P(\xi|\mathbf{J})$ が必要となる。これは、式 (1) とは逆の条件付き確率でありこれを求めるためにベイズの定理を用いる。今、推定されたメッセージを σ 、元のメッセージを ξ と区別するとベイズの定理を用いて $P(\sigma|\mathbf{J})$ は次のように表される。

$$P(\sigma|\mathbf{J}) = \frac{P(\mathbf{J}|\sigma)P_s(\sigma)}{\text{Tr}_{\{\sigma\}} P(\mathbf{J}|\sigma)P_s(\sigma)} \quad (2)$$

ここで $\text{Tr}_{\{\sigma\}}$ はトレース (trace) と呼ばれ、すべてのビット $\{\sigma\}$ についての総和を表している。加法的白色ガウス雑音 (AWGN) 通信路の場合、式 (2) の右辺の $P(\mathbf{J}|\sigma)$ は式 (1) のように表されることがすでにわかっているので、事前分布 P_s がわかれば式 (2) より元のメッセージの推定が実行できる。一般的な取り扱いを可能にするためにさまざまな情報が同じ確率で生成されているような情報源を考える。このとき P_s は定数である。したがって、事後分布は

$$P(\sigma|\mathbf{J}) = \frac{\exp(\beta \sum_{i<j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j)}{\text{Tr}_{\{\sigma\}} \exp(\beta \sum_{i<j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j)} \quad (3)$$

となる。いろいろな σ のなかで一番もっともらしいのは式 (3) を最大化するような σ である。式 (3) の確率分布で特定のビット σ_i に注目しその他のビットは考慮しないことにする。 σ_i 以外のスピンについて和をとると σ_i だけについての事後確率

$$P(\sigma_i|\mathbf{J}) = \frac{\text{Tr}_{\{\sigma(\neq\sigma_i)\}} \exp(\beta \sum_{i<j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j)}{\text{Tr}_{\{\sigma\}} \exp(\beta \sum_{i<j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j)} \quad (4)$$

が得られる。この式で $P(\sigma_i = 1|\mathbf{J})$ と $P(\sigma_i = -1|\mathbf{J})$ を比べ、前者が大きいなら 1 をビット i の復号結果とし、後者が大なら -1 とする。このプロセスをすべての

ビットについて行って得られた結果を集めて最終的な復号結果とするとき、この復号を有限温度復号 (finite-temperature decoding) あるいは MPM (Maximizer of the Posterior Marginals) 復号という [3]。ここで、ビット i の復号結果は 2 つの場合の確率の差

$$P(\sigma_i = 1|\mathbf{J}) - P(\sigma_i = -1|\mathbf{J}) \quad (5)$$

の符号なので、これは以下のように表される。

$$\text{sgn}\left(\sum_{\sigma_i=\pm 1} \sigma_i P(\sigma_i|\mathbf{J})\right) = \text{sgn}\langle\sigma_i\rangle \quad (6)$$

ここで $\langle\sigma_i\rangle$ は逆温度 β における σ_i の平均を表しており、これを熱平均という。

ソーラス符号のビット誤り率を最小にするためには受信側において西森温度で MPM 復号を行えばよく [3]、西森温度 β_N は以下の式で与えられる。

$$\beta_N = \frac{2J_0}{J^2} \quad (7)$$

ビット誤り率を評価するために復号の良さ M をメッセージ ξ とビット σ の方向余弦として定義する。すなわち

$$M = \frac{\xi \cdot \sigma}{\|\xi\| \|\sigma\|} = \frac{\sum_i \xi_i \langle\sigma_i\rangle}{N} \quad (8)$$

4 理論

4.1 レプリカ法

2 体のソーラス符号の系全体のエネルギーは次式によって表される。

$$H(\sigma, \mathbf{J}) = -\sum_{i<j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad (9)$$

系全体のエネルギーを表すこの式をハミルトニアンという。受信信号 \mathbf{J} を用いて逆温度 β の有限温度復号を行う場合、ビット σ の確率 $P(\sigma|\mathbf{J})$ は以下のように表される。

$$P(\sigma|\mathbf{J}) = \frac{\exp[-\beta H(\sigma, \mathbf{J})]}{Z} \quad (10)$$

ここで Z は分配関数と呼ばれ

$$Z = \text{Tr}_{\{\sigma\}} \exp[-\beta H(\sigma, \mathbf{J})] \quad (11)$$

で表される。統計力学ではハミルトニアンが与えられたとき式 (10) の確率分布に基づいて物理量の平均値を

自由エネルギー \mathcal{F} の鞍点評価を通して求めることができることが知られている [3, 4] . 自由エネルギー \mathcal{F} は

$$\mathcal{F} = -\beta^{-1} \ln Z \quad (12)$$

で表され, これは $\{J_{ij}\}$ の関数である . 上記から受信信号 $\{J_{ij}\}$ を用いて分配関数 Z を求め, 次に自由エネルギー \mathcal{F} を求めて鞍点評価を行えば良いことがわかる . しかし, それぞれの通信路ノイズに関する自由エネルギー \mathcal{F} を求めることは計算量的に困難である . そこで, 通信路ノイズに関する平均, つまり $\{J_{ij}\}$ の分布に関する平均をとった平均自由エネルギー $\langle\langle \mathcal{F} \rangle\rangle$ を計算する . 平均自由エネルギー $\langle\langle \mathcal{F} \rangle\rangle$ は次式で表される .

$$\langle\langle \mathcal{F} \rangle\rangle = -\beta^{-1} \langle\langle \ln Z \rangle\rangle \quad (13)$$

ここで $\{J_{ij}\}$ の分布に関する平均操作を配位平均と呼び, 熱平均と区別して $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ と表すことにする . 式 (13) の右辺には対数の平均操作が入っているが, 一般的にこの計算は困難である . しかし, 整数 n に対して Z^n の計算は可能な場合があり, その場合には恒等式 $\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} (Z^n - 1)/n$ を用いて $\langle\langle \ln Z \rangle\rangle$ を計算することができる . すなわち,

$$\langle\langle \ln Z \rangle\rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\langle\langle Z^n \rangle\rangle - 1}{n} \quad (14)$$

である . ここで n に関して整数から実数への解析接続が行われていることに十分注意する必要がある . 統計力学において開発されたこの計算手法はレプリカ法と呼ばれる . 2 体のソーラス符号のモデルの場合も, 自然数 n に対して $\langle\langle Z^n \rangle\rangle$ は次式で計算される .

$$\langle\langle Z^n \rangle\rangle = \int \left[\prod_{i < j} dJ_{ij} P(J_{ij}) \right] Z^n \quad (15)$$

$$= \int \left[\prod_{i < j} dJ_{ij} P(J_{ij}) \right] \text{Tr}_{\{\sigma^\alpha\}} \exp \left[-\beta \sum_{\alpha} \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \right] \quad (16)$$

ここで $\alpha = 1, 2, \dots, n$ はレプリカを表すインデックスである . 式 (16) を計算すると以下の式が得られる .

$$\langle\langle Z^n \rangle\rangle = \int \left[\prod_{\alpha < \beta} dq_{\alpha\beta} \frac{dN \hat{q}_{\alpha\beta}}{2\pi i} \right] \left[\prod_{\alpha} dm_{\alpha} \frac{dN \hat{m}_{\alpha}}{2\pi i} \right] \times \exp[N(G_1 + G_2 + G_3)] \quad (17)$$

ただし

$$G_1 = \frac{\beta^2 J^2}{2} \sum_{\alpha < \beta} q_{\alpha\beta}^2 + \beta J_0 \sum_{\alpha} m_{\alpha}^2 + \frac{\beta^2 J^2 n}{4} \quad (18)$$

$$G_2 = - \sum_{\alpha < \beta} \hat{q}_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha} \hat{m}_{\alpha} m_{\alpha} \quad (19)$$

$$G_3 = \frac{1}{N} \ln \left\{ \text{Tr}_{\{\sigma^\alpha\}} \exp \left(- \sum_{\alpha < \beta} \hat{q}_{\alpha\beta} \sum_i \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta - \sum_{\alpha} \hat{m}_{\alpha} \sum_i \xi_i \sigma_i^\alpha \right) \right\} \quad (20)$$

ここで

$$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta \quad m_{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i \sigma_i^\alpha \quad (21)$$

であり, δ 関数で $q_{\alpha\beta}$, m_{α} の条件を取り込んだ後, δ 関数の積分表現を用いた .

4.2 レプリカ対称解

レプリカ対称性 (Replica-symmetry)

$$q = q_{\alpha\beta}, \quad \hat{q} = \hat{q}_{\alpha\beta}, \quad m = m_{\alpha}, \quad \hat{m} = \hat{m}_{\alpha} \quad (22)$$

を仮定し, 式 (17) の積分は鞍点法 [3, 4, 5] で評価する . その結果 1 ビット当たりの平均自由エネルギー f は

$$\begin{aligned} -\beta f &= -\beta \frac{\langle\langle \mathcal{F} \rangle\rangle}{N} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \frac{1}{N} \ln \langle\langle Z^n \rangle\rangle \quad (23) \\ &= -\frac{1}{4} \beta^2 J^2 q^2 + \frac{1}{2} \hat{q} q + \beta J_0 m^2 - \hat{m} m \\ &\quad + \frac{1}{4} \beta^2 J^2 - \frac{1}{2} \hat{q} + \int Dx \ln \left[2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}} x + \hat{m} \right) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

となる . ただし,

$$Dx \equiv \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \quad (25)$$

である . 鞍点条件 [3]

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial f}{\partial \hat{m}} = 0 \quad (26)$$

より鞍点方程式が以下のように求められる .

$$q = \int Dx \tanh^2 \beta G \quad (27)$$

$$m = \int Dx \tanh \beta G \quad (28)$$

ただし

$$G = J\sqrt{q}x + 2J_0m \quad (29)$$

である．また，元のビットと復号されたビットの一致度を表す復号の良さ M は式 (27), (28) から計算される q, m を用いて

$$M = \int Dx \operatorname{sgn} G \quad (30)$$

で計算される．

なお， K 体のソーラス符号の場合の鞍点方程式及び復号の良さ M は以下のように求められる．

$$q = \int Dx \tanh^2 \beta G_K \quad (31)$$

$$m = \int Dx \tanh \beta G_K \quad (32)$$

$$M = \int Dx \operatorname{sgn} G_K \quad (33)$$

ただし

$$G_K = J \sqrt{\frac{Kq^{K-1}}{2}} x + J_0 K m^{K-1} \quad (34)$$

である [3] .

5 結果と考察

5.1 計算機実験の方法

計算機実験は以下のように実行した．まず，ビット数 N の ± 1 の 2 値からなるメッセージ ξ を各ビット毎に ± 1 をランダムに割り当て作成しソーラス符号化を行う．符号化したものにガウス雑音を重畳し，ランダムに選択した i 番目のビットについて

$$P(\sigma_i = 1 | \mathbf{J}) = \frac{\exp(\beta \sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_j)}{\operatorname{Tr}_{\sigma_i} \exp(\beta \sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j)} \quad (35)$$

で計算される確率 $P(\sigma_i = 1 | \mathbf{J})$ で $\sigma_i = +1, 1 - P(\sigma_i = 1 | \mathbf{J})$ で $\sigma_i = -1$ とした．復号の良さ M を式 (8) を用いて計算するために $\langle \sigma_i \rangle$ を用いるが，ある一定の時間が経過するまで σ_i の結果はばらついてしまい信憑性がない．そこで今回の実験では 1000 回 σ_i の更新を行い，その後 1000 回で $\langle \sigma_i \rangle$ を計算した．

以上の工程のうち，雑音の重畳～復号の良さ M の計測を 11 回繰り返し行い，得た復号の良さ M の小さいものから順に 3, 6, 9 番目の値を計算機実験の結果としてエラーバーで表示する．

5.2 2 体の場合

まず 2 体の場合について示す．図 2, 3 は信号の強さ $J_0 = 1$ ，ガウス雑音の分散 $J^2 = 1$ のときの二つのパラメータ q, m と復号の良さ M を式 (27), (28), (30) を数値的に解いた結果を示したものである．西森温度 $\beta_N = \frac{2J_0}{J^2} = 2$ で復号の良さ M は最大になっており，またこのとき $q = m$ となっている．

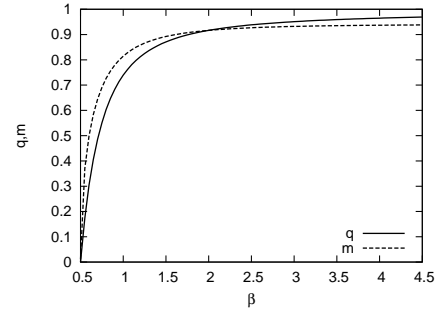


図 2: q, m の理論計算結果 (2 体, $J_0 = 1, J^2 = 1$)

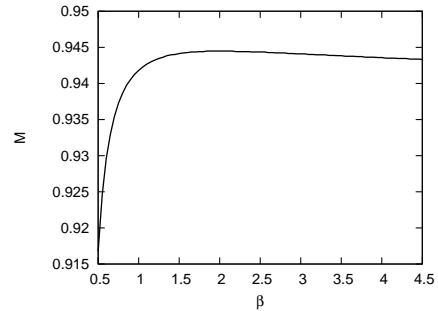


図 3: M の理論計算結果 (2 体, $J_0 = 1, J^2 = 1$)

次に $J_0 = 1, J^2 = 1$ のときのビット数 $N = 1000, N = 10000$ の計算機実験と理論計算の結果の比較を図 4, 5 にそれぞれ示す．

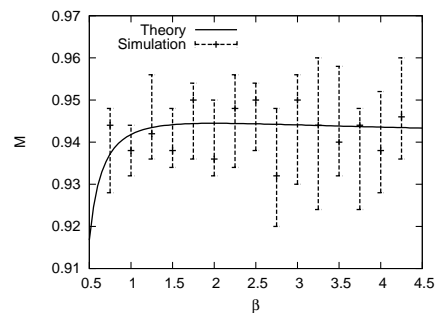


図 4: M に関する理論と実験 ($N = 1000$) の比較 (2 体, $J_0 = 1, J^2 = 1$)

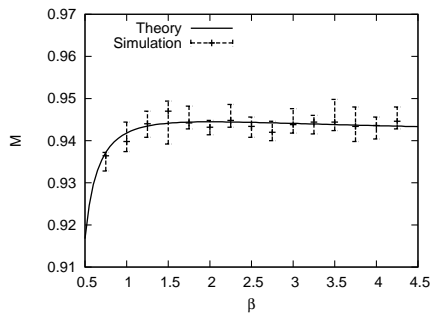


図 5: M に関する理論と実験 ($N = 10000$) の比較 (2 体, $J_0 = 1, J^2 = 1$)

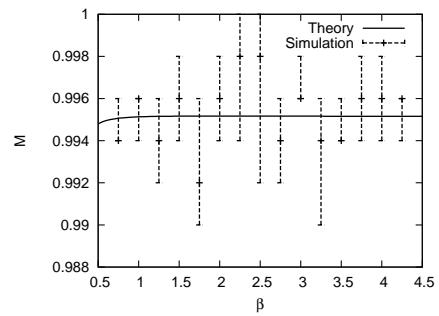


図 8: J_0 の変化による M への影響 (2 体, $N = 1000, J_0 = 2, J^2 = 2$)

図 4, 図 5 を比較すると理論と計算機実験の結果はよく一致しており, さらにビット数 N が大きくなるほどエラーバーの幅が狭くなり試行毎のばらつきが少ない結果が得られていることがわかる.

最後に, パラメータ J_0 の影響を調べるためにビット数 $N = 1000$ で $J^2 = 2$ と固定し, $J_0 = 1, 1.5, 2$ の 3 パターンの場合について実験を行った. 図 6, 7, 8 に結果を示す.

図 6, 7, 8 から送信信号の強さ J_0 を大きくしたとき復号の良さ M が良くなり, また図 4, 図 6, 図 8 から二つのパラメータ J_0 と J^2 では J_0 の影響の方が大きいことがわかる. これは式 (29) において J^2 はその平方根 J が値として作用し, 対して J_0 はそのまま作用しているためである.

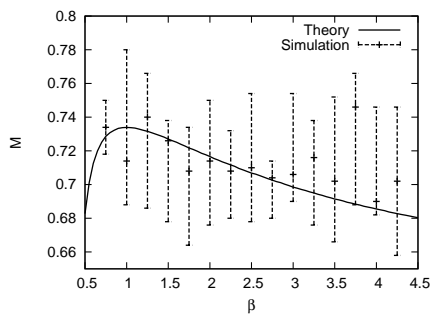


図 6: J_0 の変化による M への影響 (2 体, $N = 1000, J_0 = 1, J^2 = 2$)

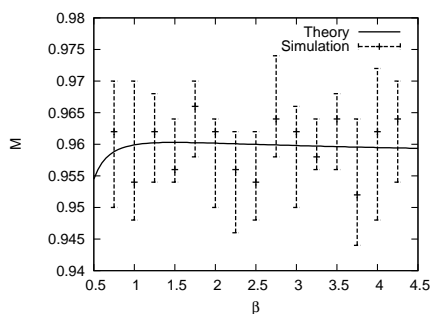


図 7: J_0 の変化による M への影響 (2 体, $N = 1000, J_0 = 1.5, J^2 = 2$)

5.3 3 体以上の場合

K が 3 以上の場合のソーラス符号についても, $J_0 = 1, J^2 = 1$ のときと $J_0 = 1, J^2 = 1.5$ のときの 2 体, 3 体, 4 体の場合の復号の良さについてそれぞれ理論計算を行った. 図 9, 10 に結果を示す. 図 9, 10 より K の値が大きいほど復号の良さが良いことがわかる.

なお, 3 体以上のソーラス符号の計算機実験は行っていない. たとえば $N = 1000$ のとき $K = 2$ ならば 1000 個のビットの中から 2 つの積をとる組み合わせは ${}_{1000}C_2 = 499500$ となるのに対して, $K = 3$ ならば ${}_{1000}C_3 = 332334000$ となり計算量的困難に陥ってしまうためである.

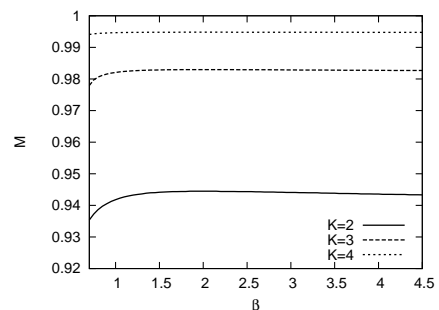


図 9: K 体のソーラス符号における M の理論曲線 ($J_0 = 1, J^2 = 1$)

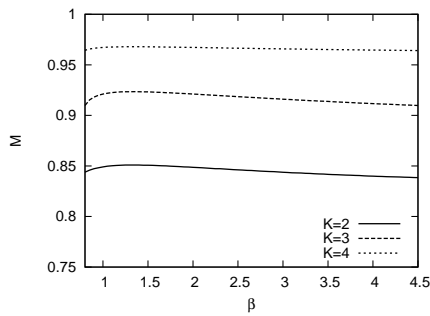


図 10: K 体のソーラス符号における M の理論曲線 ($J_0 = 1, J^2 = 1.5$)

6 むすび

シャノン限界を漸近的に満たす通信路符号化のひとつであるソーラス符号に関して、AWGN 通信路における誤り訂正能力についてレプリカ法を用いた理論計算と計算機実験を比較することで調べた。計算機実験ではビット数 $N = 1000$ 程度でも良好な復号の良さが得られることがわかった。理論計算では西森温度 β_N で最大値を取ることが示され、計算機実験の結果と比較的よく一致する理論曲線が得られた。また、送信信号の強さ J_0 と白色ガウス雑音の分散 J^2 の値の変化による復号の良さの変化について J_0 が強く作用することがわかった。さらに、3 体以上のソーラス符号についても 2 体と同様に西森温度 β_N で最大値を取り、2 体よりも復号の性能が良いことがわかった。しかし、 K の値が増えると計算量が大幅に増加することからメモリ不足や計算時間がかかりすぎるといった問題が明らかになった。

本稿では相互作用 $\{J_{ij}\}$ はクエンチ（凍結）されており、ビットだけがダイナミクスを持つモデルを考えた。これに対し、ビットの変化よりもゆっくりではあるが相互作用自身も変化するシステムを考えることも可能でありこの枠組みはパーシャルアニーリングと呼ばれている [6, 7, 8, 9]。

三好らは 2 体のソーラス符号にパーシャルアニーリングを適用した場合の解析を行った [10]。その結果相互作用をビットのヘブ則で変化させるとビットの逆温度 β の広い範囲で復号の良さ M がフラットになるが、レプリカ対称解で相互作用の逆温度 $\tilde{\beta}$ とヘブ則の強さ ϵ を大きくした場合には M が通常の有限温度復号の値よりも大きくなるものの、計算機実験の結果とは一致しないことがわかった。この解析からソーラス符号にパーシャルアニーリングを用いれば M が通常の有限温

度復号の値よりも良くなる可能性があることが示されたといえるので、今後はその条件について詳しく調べる予定である。

謝辞

本研究の一部は科学研究費補助金（基盤 (C)21500228）および平成 22 年度関西大学大学院理工学研究科高度化推進研究費によるものです。

参考文献

- [1] N.Sourlas, “Spin-glass models as error-correcting codes”, *Nature*, 339, **693-695**, 1989
- [2] Masato Inoue, Koji Hukushima and Masato Okada, “Analysis Method Combining Monte Carlo Simulation and Principal Component Analysis -Application to Sourlas Code-”, *Journal of the Physical Society of Japan Vol. 75, No. 8*, **084003**, 2006
- [3] 西森 秀稔, スピングラス理論と情報統計力学, 岩波書店, 東京, 1999
- [4] 樺島 祥介, 学習と情報の平均場理論, 岩波書店, 2005
- [5] 日本数学会, 岩波数学辞典 [第 4 版], 岩波書店, 東京, 2007
- [6] V. Dotsenko, S. Franz and M. Mézard, “Partial annealing and overfrustration in disordered systems,” *J. Phys. A: Math. Gen.* 27, **2351-2365**, 1994.
- [7] A. C. C. Coolen, R. W. Penney, and D. Sherrington, “Coupled dynamics of fast spins and slow interactions: An alternative perspective on replicas”, *Physical Review B*, Volume 48, Number 21, 1993-I
- [8] R. W. Penney, A. C. C. Coolen, and D. Sherrington, “Coupled dynamics of fast spins and slow interactions in neural networks and spin systems”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 26, **3681-3695**, 1993
- [9] Uezu, T., Abe, K., Miyoshi, S., and Okada, M., “Statistical mechanical study of partial annealing of a neural network model”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol.43, **025004** (22 pages), 2010
- [10] 三好 誠司, 上江洩 達也, 岡田 真人, “パーシャルアニーリングのレプリカ解析-2 体ソーラス符号の場合-”, 情報論的学習理論ワークショップ (IBIS2007) 予稿集, pp.115-120, 2007.11