

パーシャルアニーリングによる連想記憶安定領域の拡大

Partial Annealing Enlarges Steady Regions of Associative Memory Model

三好 誠司 (P)[†], 上江洲 達也[‡], 阿部 啓[‡], 岡田 真人^{§,¶}

Seiji Miyoshi(P), Tatsuya Uezu, Kei Abe, and Masato Okada

[†] 関西大学 システム理工学部, [‡] 奈良女子大学大学院 人間文化研究科

[§] 東京大学大学院 新領域創成科学研究科, [¶] 理研 脳総研

miyoshi@ipc.ku.kansai-u.ac.jp

Abstract— We analyze an interaction system of which connection weights, as well as spins, change. The weights are reinforced by Hebbian rule with biases that are decided by correlation learning of random patterns. It is clarified that the steady regions are enlarged in both of memory states and mixed states.

Keywords— partial annealing, replica method, AT stability, Hopfield model, mixed state

1 はじめに

多体相互作用系, すなわち多数の「スピン」とそれらの「相互作用」という二種類の変数を有するシステムにおいて, スピンの変化よりもゆっくりとではあるけれども相互作用も変化するモデルを考えることができる. この枠組みはパーシャルアニーリングと呼ばれ [1], その性質は神経生理学的な観点からも興味深い [2].

Coolen らはスピンのヘブ則が相互作用を変化させる場合についてレプリカ法と類似の方法を用いて解析した [2, 3]. 通常レプリカ法においては相互作用系の複製 (レプリカ) の個数 n を 0 に近づける極限操作を行うが, パーシャルアニーリングの解析においては n はスピンと相互作用の温度の比であり正の有限値となることが特徴である. Dotsenko らはパーシャルアニーリングの枠組みで温度比 n が負の場合に着目し, ホップフィールドネットの記憶容量と SK スピングラスを例として解析を行った [1]. 特に前者において n が負の時にはアトラクタパターンが直交に向かい, その結果記憶容量が 1 まで増大するという興味深い解析結果が示されている.

今回われわれは p 個のランダムパターンの相関学習の形でバイアスを加えたパーシャルアニーリングについてレプリカ法を用いて解析した. 連想記憶モデルに有限個のパターンを記憶する場合, 記憶パターンとその混合パターンがいずれもアトラクタになることが知られている [5] が, 本研究ではヘブ則の強さを制御するパラメータを導入することにより記憶パターン想起状態や混合パターン想起状態に対してパーシャルアニーリングがどのような影響を与えるかについて調べた [6, 7].

2 モデル

本研究ではスピン $\sigma = \{\sigma_i\}, i = 1, \dots, N$ とその相互作用 $\mathbf{J} = \{J_{ij}\}, i < j$ の両方がダイナミクスを持ち, σ の変化が \mathbf{J} の変化よりも十分速い場合を考える. 相互作用 $\mathbf{J} = \{J_{ij}\}$ の変化は

$$\tau \frac{d}{dt} J_{ij} = \frac{1}{N} (\epsilon \langle \sigma_i \sigma_j \rangle + K_{ij}) - \mu J_{ij} + \eta_{ij}(t) \sqrt{\frac{\tau}{N}} \quad (1)$$

で記述されるものとする. ここで, $\langle \dots \rangle$ は温度 T での平均 (熱平均) を表す. すなわち, 相互作用 \mathbf{J} はスピン σ のヘブ則で変化し, ϵ はヘブ則の強さを表すパラメータである. K_{ij} は p 個のランダムパターン $\{\xi_i^\nu\}$ の相関学習の形で加わるバイアスであり,

$$K_{ij} = \frac{K}{\sqrt{p}} \sum_{\nu=1}^p \xi_i^\nu \xi_j^\nu \quad (2)$$

である. $\eta_{ij}(t)$ は温度 \tilde{T} のランジュバンノイズであり, $\langle \eta_{ij}(t) \eta_{kl}(t') \rangle = 2\tilde{T} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta(t-t')$ であるとする.

すなわちこの系では, スピン σ と相互作用 \mathbf{J} の変化はそれぞれ異なる温度 T, \tilde{T} で特徴付けられている.

3 理論

式 (1) の $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ は

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \frac{1}{Z_\beta} \text{Tr}_{\{\sigma\}} \exp(-\beta H) \sigma_i \sigma_j \quad (3)$$

と計算できる. ここで $\beta = T^{-1}$, $H = -\sum_{i<j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$ (ただし, J_{ij} はその時点での値) はハミルトニアンであり, $Z_\beta = \text{Tr}_{\{\sigma\}} \exp(-\beta H)$ はスピンの分配関数と呼ばれる. 実効ハミルトニアン \mathcal{H} を

$$\mathcal{H} = -\sum_{i<j} K_{ij} J_{ij} + \frac{\mu N}{2} \sum_{i<j} J_{ij}^2 - \frac{\epsilon}{\beta} \ln Z_\beta \quad (4)$$

とおくと式 (1) は

$$\tau \frac{dJ_{ij}}{dt} = -\frac{1}{N} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_{ij}} + \eta_{ij}(t) \sqrt{\frac{\tau}{N}} \quad (5)$$

と書ける. このランジュバン方程式の定常状態において相互作用 $\{J_{ij}\}$ の確率分布は $\tilde{\beta} = \tilde{T}^{-1}$ を用いて

$P(\{J_{ij}\}) \propto \exp(-\tilde{\beta}\mathcal{H})$ となる. したがって, 全系の分配関数 $\tilde{Z}_{\tilde{\beta}}$ は次のように計算できる.

$$\tilde{Z}_{\tilde{\beta}} = \int d\mathbf{J} \exp(-\tilde{\beta}\mathcal{H}) = \int d\mathbf{J} (Z_{\beta})^n \times \exp\left(-\frac{\tilde{\beta}}{2}N\mu \sum_{i<j} J_{ij}^2 + \frac{\tilde{\beta}K}{\sqrt{p}} \sum_{i<j} J_{ij} \sum_{\nu=1}^p \xi_i^{\nu} \xi_j^{\nu}\right). \quad (6)$$

ここで, 積分は $-\infty$ から ∞ までの定積分であり, $d\mathbf{J} = \prod_{i<j} dJ_{ij}$, $n = \epsilon\tilde{\beta}/\beta$ である. 以後, レプリカ法の処方箋 [4] に従い計算を実行する. すなわち, n を自然数と考へて $(Z_{\beta})^n$ を計算する. さらにオーダーパラメータ $q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^{\alpha} \sigma_i^{\beta}$, $m_{\nu}^{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^{\alpha} \xi_i^{\nu}$ を導入し, レプリカ対称性を仮定することにより最終的に鞍点方程式が以下のように得られる.

$$q = \left[\frac{\int Dx \cosh^n \Xi \tanh^2 \Xi}{\int Dx \cosh^n \Xi} \right], \quad (7)$$

$$m_{\nu} = \left[\frac{\xi^{\nu} \int Dx \cosh^n \Xi \tanh \Xi}{\int Dx \cosh^n \Xi} \right], \quad (8)$$

$$\Xi = \beta \left(\sqrt{\frac{q}{\mu\tilde{\beta}}} x + \frac{K}{\mu\sqrt{p}} \sum_{\nu} m_{\nu} \xi^{\nu} \right), \quad (9)$$

ここで $Dx \equiv \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ であり, $[\dots]$ はパターン $\{\xi\}$ に関する平均を表す.

4 結果と議論

以下ではパターン数 $p = 3$ の場合の理論 (鞍点方程式の数値解) と計算機実験の結果について述べる. なお, $K = \mu = 1$ とする. 鞍点方程式には何種類かの解が存在するが, 記憶パターンのいずれかを想起している状態と 3 パターンの混合パターンを想起している状態について調べる. グラフにおいては比較のためにパーシャルアニーリング無し (通常) のホップフィールドモデル ($\epsilon = 0$ に相当) の結果も重ねて示した.

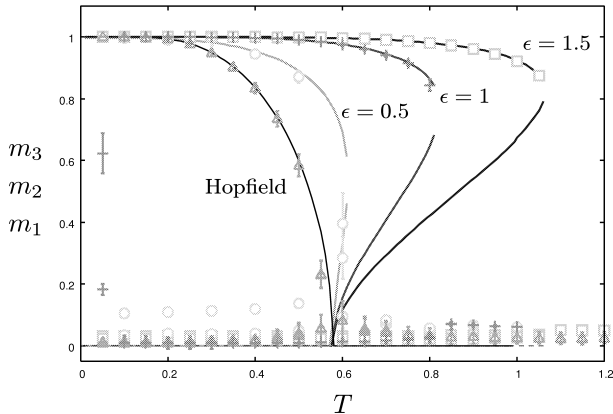


図 1: 記憶パターン想起状態の理論と計算機実験

図 1 は記憶パターン想起状態に関する理論と計算機実験 ($N = 400$) の結果である. 理論と計算機実験の結

果はよく一致している. また, パーシャルアニーリングにより相転移が二次転移から一次転移に変化すること, ヘブ則の強さ ϵ を大きくすることにより, 安定領域が広がる (相転移点が高温度側にシフトする) ことがわかる.

図 2 は混合パターン想起状態に関する理論と計算機実験 ($N = 500$) の結果である. ϵ が小さい場合には理論と計算機実験には不一致が見られる. AT 安定性解析 [8] の結果, これはレプリカ対称性の破れによるものであることが明らかになった. このように記憶パターンの場合とは異なる現象も存在するが, ヘブ則の強さ ϵ を大きくすることにより, 安定領域はやはり広がるのがわかる. また, 記憶パターンの相転移温度に対する混合パターンの相転移温度の比を調べたところ, これも ϵ を大きくすると増大することがわかった.

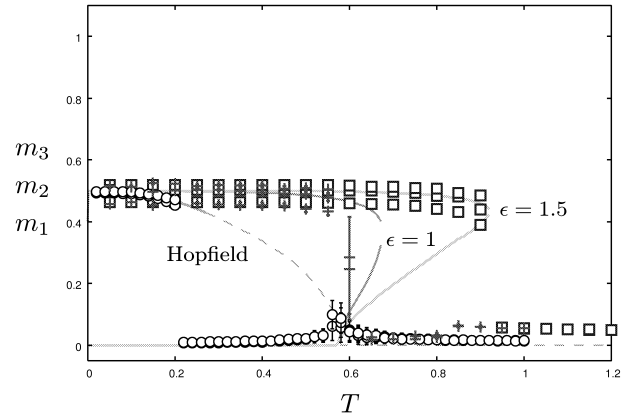


図 2: 混合パターン想起状態の理論と計算機実験

参考文献

- [1] V. Dotsenko, S. Franz and M. Mézard (1994) “Partial annealing and overfrustration in disordered systems.” J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 2351–2365.
- [2] R. W. Penny, A. C. C. Coolen and D. Sherrington (1993) “Coupled dynamics of fast spins and slow interactions in neural networks and spin systems,” J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 3681–3695.
- [3] A. C. C. Coolen, R. W. Penny and D. Sherrington (1993) “Coupled dynamics of fast spins and slow interactions: An alternative perspective on replicas,” Phys. Rev. B, **48**(21), 16116–16118.
- [4] 西森 秀稔 (1999) スピングラス理論と情報統計力学, 岩波書店, 東京.
- [5] J. Hertz, A. Krogh and R. G. Palmer (1991) Introduction to the Theory of Neural Computation, Addison-Wesley.
- [6] 阿部 啓 (2008) “シナプスが時間変化するニューラルネットワークモデルの統計力学的研究,” 奈良女子大学大学院修士論文.
- [7] 阿部 啓, 上江洲 達也, 三好 誠司, 岡田 真人 (2008) “シナプス荷重が時間変化するニューラルネットワークモデルの定常状態の解析 III,” 日本物理学会年次大会, 25pRJ-14.
- [8] J. R. L. de Almeida and D. J. Thouless (1978) “Stability of the Sherrington-Kirkpatrick solution of a spin glass model,” J. Phys. A: Math. Gen. **11**, 983–990.