P2-16　シナプス遅延と切断による記憶容量の発散

三好 誠司(P)（神戸高専電子工学科）　岡田 真人（理研 脳総研，科技団 川人プロジェクト）

Storage capacity diverges with synaptic efficiency in an associative memory model with synaptic delay and pruning

Seiji MIYOSHI (Kobe City College of Tech.)　Masato OKADA (RIKEN BSI , KDB JST)

ABSTRACT

It is proposed that connecting rates are decreased under the condition in which the total number of synapses is constant by introducing delay synapses. The steady state of the model is treated theoretically and the storage capacities are analyzed quantitatively by using the statistical neurodynamics and the discrete Fourier transform.

相関型の連想記憶モデルではシナプス切断によりシナプス一本あたりの記憶容量が増大することが知られているが，ネットワーク全体の記憶容量は減少してしまう．この困難を解決するために，遅延シナプスを導入し，シナプス本数は一定に保ちながら，シナプスの結合率を小さくすることを提案する．まず，統計神経力学と離散フーリエ変換を用いてモデルの巨視的定常状態方程式を導出し，無切断の場合の記憶容量を議論する．次に，無作為切断と系統的切断の 2 通りのシナプス切断について議論する．シナプス総本数一定の条件下でシナプスの結合率を下げながら遅延段数を増すと記憶容量が増大することが明らかになる．無作為切断の場合には記憶容量が 2/π に漸近するのに対し，系統的切断の場合には遅延段数の対数に比例して記憶容量が発散するという興味深い事実が明らかになる．これらは，脳がシナプスの過剰生成と刈り込みを行う理論的な裏付けとなるものである．また，脳内においては平衡状態よりも系列やリミットサイクル等の動的なアトラクタを記憶する方が望ましいことを強く示唆する結果である．

背　景

外乱や故障に対する頑健さはニューラルネットワークの特徴のひとつ

シナプスの過剰生成と刈り込み　→　実際の神経系において観測されている普遍的な現象（Chechik, et al., 1998.）

相関型の連想記憶モデルの場合，シナプス切断によりシナプス効率は増大．しかし，ネットワーク全体の記憶容量は減少（Mimura, Kimoto & Okada, cond-mat/0207545）

遅延シナプスをもつ離散時間同期型モデルに関する統計神経力学による解析（矢内＆金，1995. Miyoshi, Yanai & Okada, cond-mat/0209258）　**→ 計算量が多いという問題点**

目　的

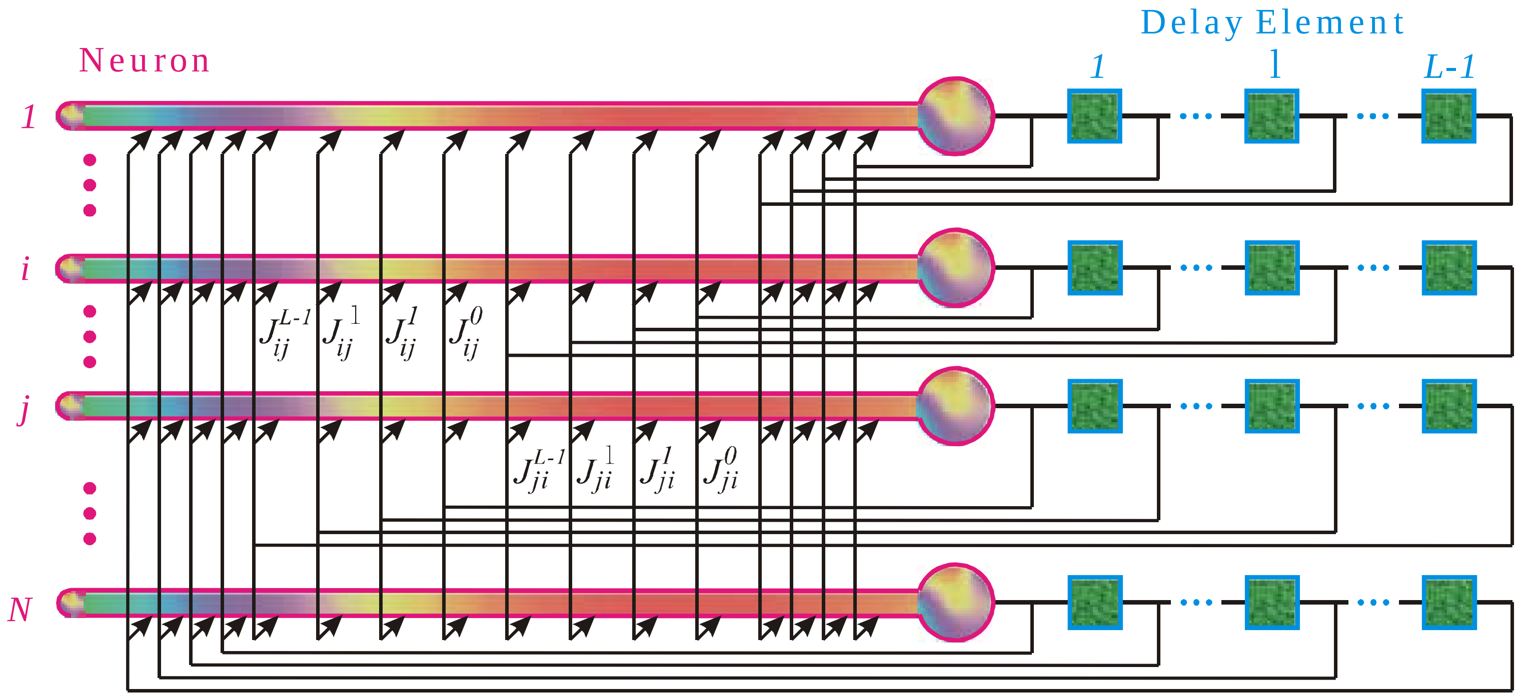
遅延シナプスを導入し，シナプス本数は一定に保ちながら，シナプスの結合率を小さくすることを提案し，記憶容量を理論的に議論する．

解析手法

矢内＆金(1995), Miyoshi, Yanai & Okada(2002)**の理論において系の定常状態に注目し，時間に関する並進対称性にもとづいて離散フーリエ変換を用いることによりモデルの巨視的定常状態方程式を導出**

等価なシナプスノイズに置き換えることによりシナプス切断を解析的に扱う（Okada, Fukai & Shiino, 1998.**）**

モデル



ダイナミクスは離散時間同期型

$$
\begin{aligned}
x_i^{t+1} &= \mathrm{sgn}\left(u_i^t\right) \\
u_i^t &= \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{j=1}^{N} J_{ij}^l x_j^{t-l}
\end{aligned}
$$

系列想起の結合荷重を相関学習により決定

$$
J_{ij}^l = \frac{b_l}{N} \sum_{\mu} \xi_i^{\mu+1+l} \xi_j^{\mu}
$$

オーバラップ

$$
m_{\mu}^t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i^{\mu} x_i^t
$$

統計神経力学による巨視的状態遷移方程式

矢内＆金(1995)　Miyoshi, Yanai & Okada(2002)

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \sum_{l=0}^{L-1}\sum_{l'=0}^{L-1} b_l b_{l'} v_{t-l,t-l'} \\
v_{t-l,t-l'} &= \alpha\delta_{l,l'} \\
&+ U_{t-l}U_{t-l'} \\
&\quad\times \sum_{k=0}^{L-1}\sum_{k'=0}^{L-1} b_k b_{k'} v_{t-l-k-1,t-l'-k'-1} \\
&+ \alpha\left(b_{l-l'-1}U_{t-l'} + b_{l'-l-1}U_{t-l}\right) \\
U_t &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma_{t-1}}\exp\left(-\frac{\left(s^{t-1}\right)^2}{2\sigma_{t-1}^2}\right) \\
s^t &= \sum_{l=0}^{L-1} b_l m_{t-l} \\
m_{t+1} &= \mathrm{erf}\left(\frac{s^t}{\sqrt{2}\sigma_t}\right)
\end{aligned}
$$

計算機シミュレーションの結果をきわめて精度良く定量的に説明する理論であるが，

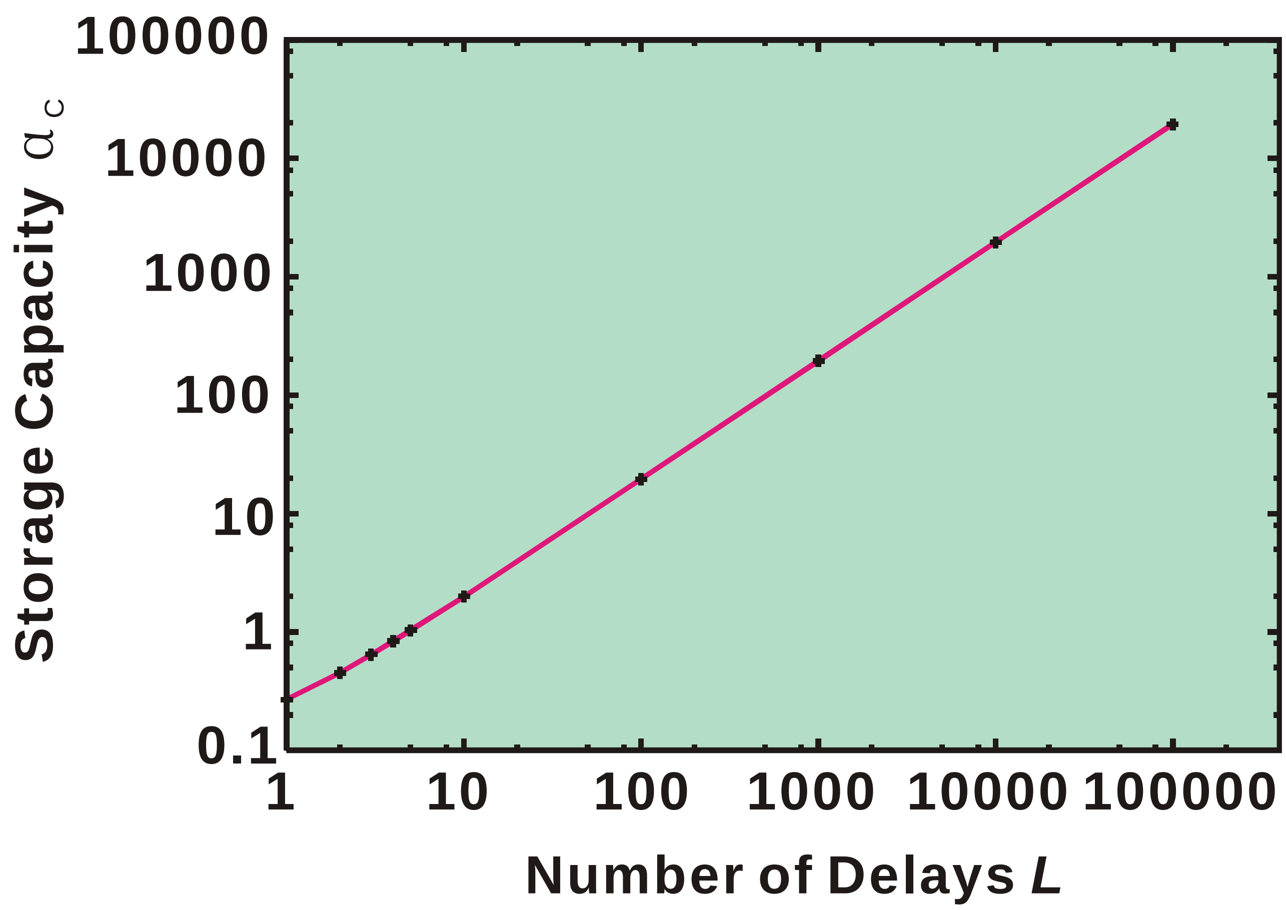
計算量が多いという問題点（L^4t のオーダー）

今回導出した巨視的定常状態方程式

- 系の定常状態に注目
- 時間に関する並進対称性を利用
- 離散フーリエ変換

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha\left[(1-U)\sin(\pi x)+U\sin\left\{(2L+1)\pi x\right\}\right]\left[1-\cos(2L\pi x)\right]}{\sin(\pi x)\left[2\sin^2(\pi x)-U^2\left\{1-\cos(2L\pi x)\right\}\right]}dx \\
U &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right) \\
s &= mL \\
m &= \operatorname{erf}\left(\frac{s}{\sqrt{2}\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

遅延段数と記憶容量（全結合）



記憶容量は遅延段数 L に比例．比例定数は 0.195

シナプスの切断

１．無作為切断

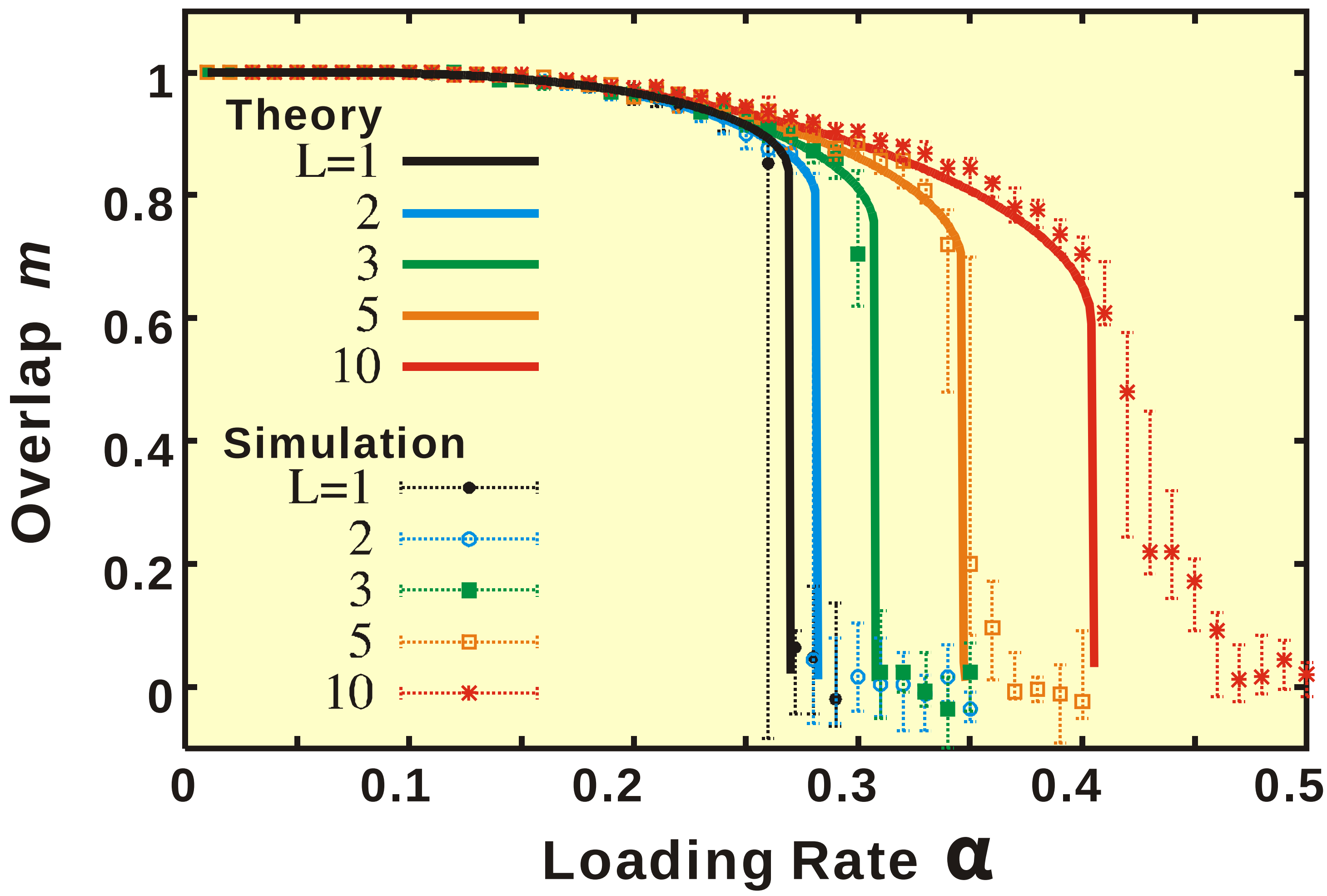
$$J_{ij}^{l} = \frac{c_{ij}^{l}}{Nc}\sum_{\mu}\xi_i^{\mu+1+l}\xi_j^{\mu}$$

$$\mathrm{Prob}[c_{ij}^{l}=1] = 1-\mathrm{Prob}[c_{ij}^{l}=0] = c$$

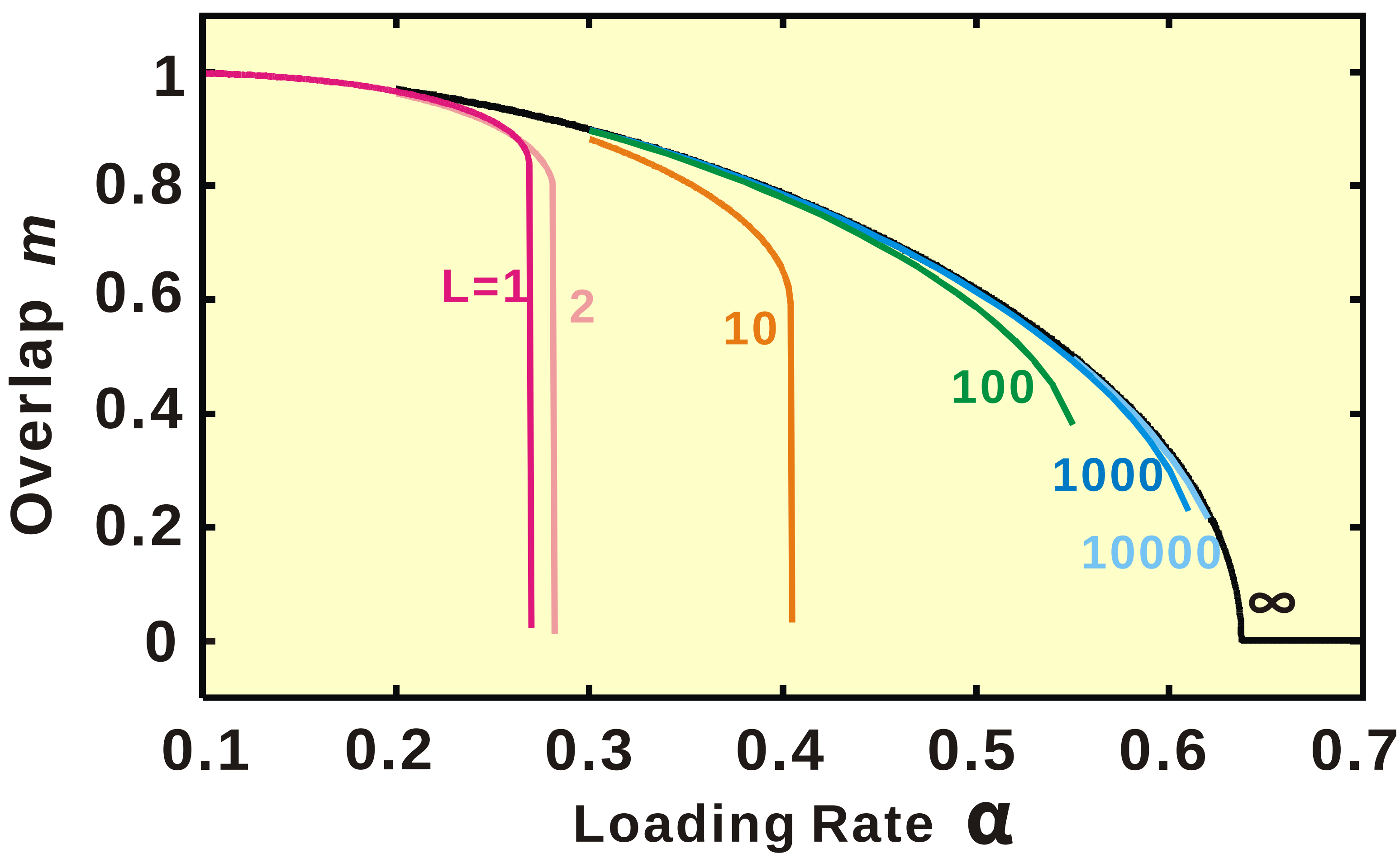
シナプス切断によりノイズ成分が増加する

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 + \frac{\alpha(1-c)}{c}L$$

切断によるノイズの増加分



Random Pruning (theory & simulation)

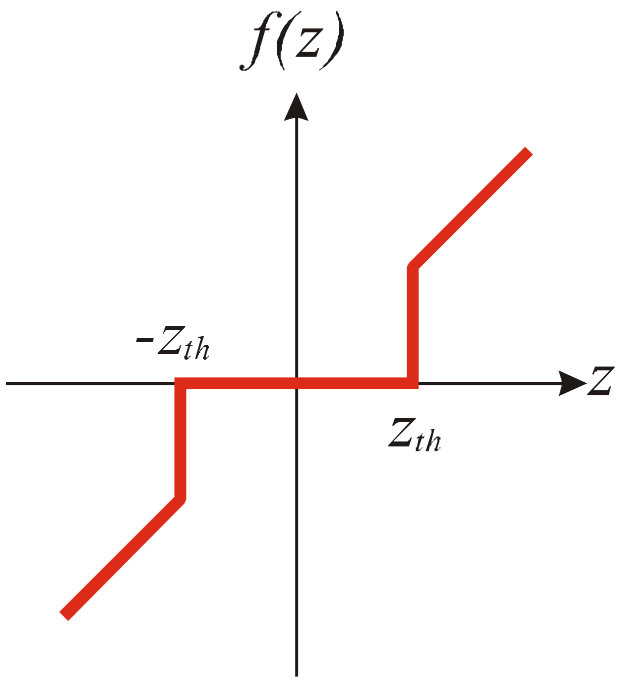


Random Pruning (theory)

2．系統的切断

結合荷重の値が小さいシナプスを切断

非線形シナプスによる表現



$$J_{ij}^{l} = \frac{\sqrt{\alpha N}}{N} f\left(T_{ij}^{l}\right)$$

$$T_{ij}^{l} = \frac{1}{\sqrt{\alpha N}} \sum_{\mu} \xi_{i}^{\mu+1+l} \xi_{j}^{\mu}$$

$$c = \int_{\{z|f(z)\neq 0\}} Dz = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{z_{th}}{\sqrt{2}}\right)$$

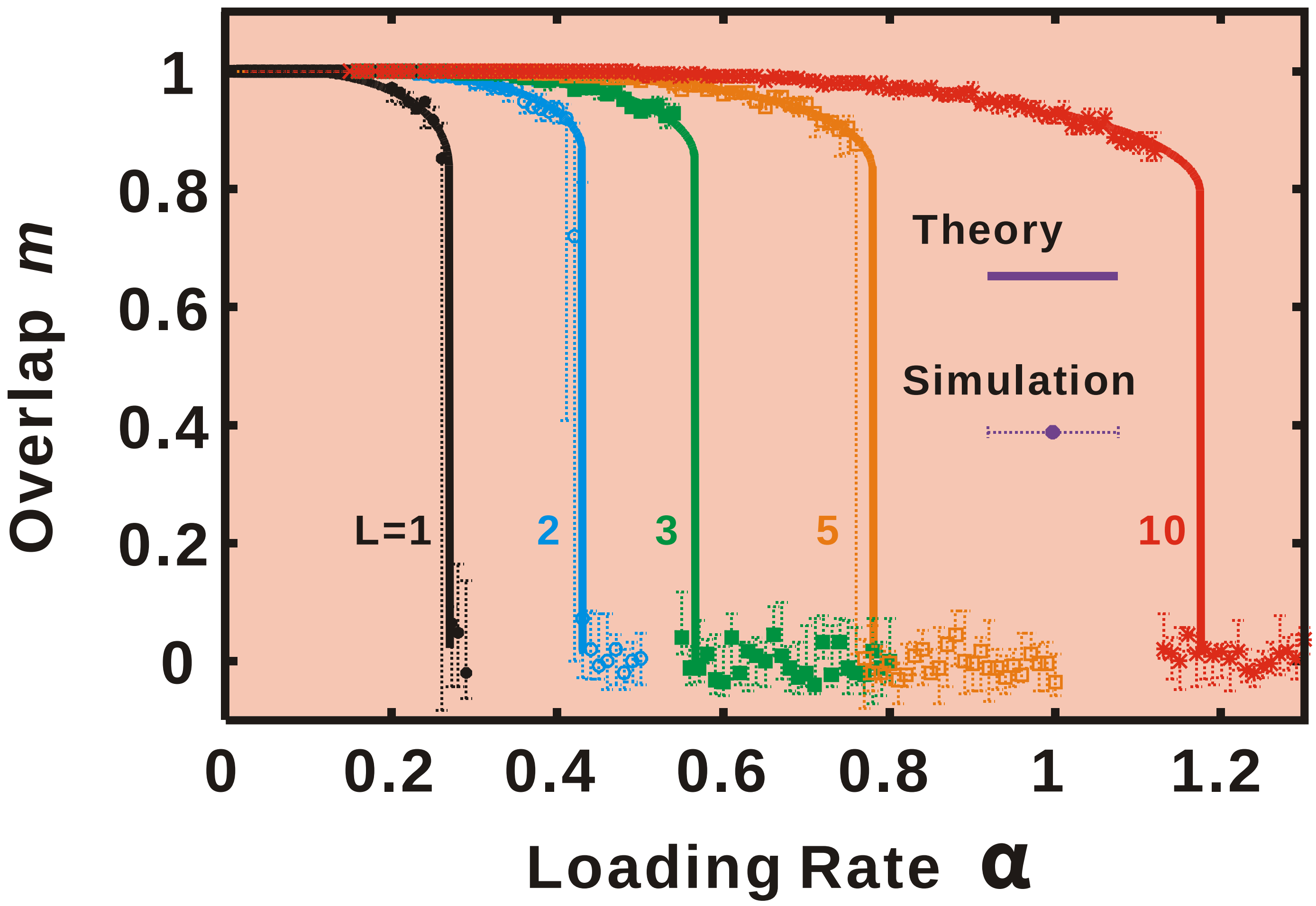
$$Dz \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

シナプス切断によりノイズ成分が増加する

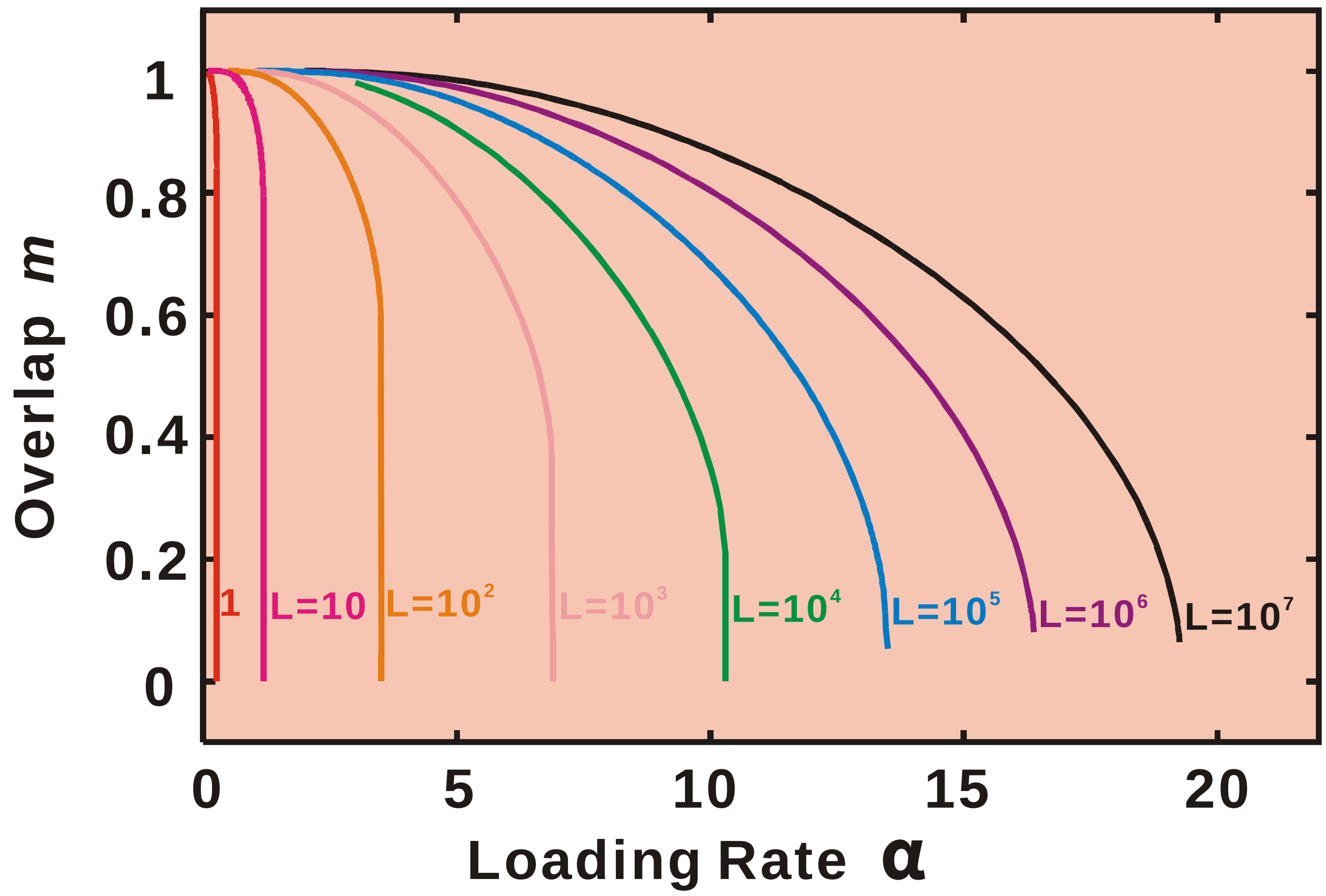
$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 + \underbrace{\alpha\left(\frac{\tilde{J}^2}{J^2} - 1\right) L}_{\text{切断によるノイズの増加分}}$$

$$J = \int Dz f'(z)$$

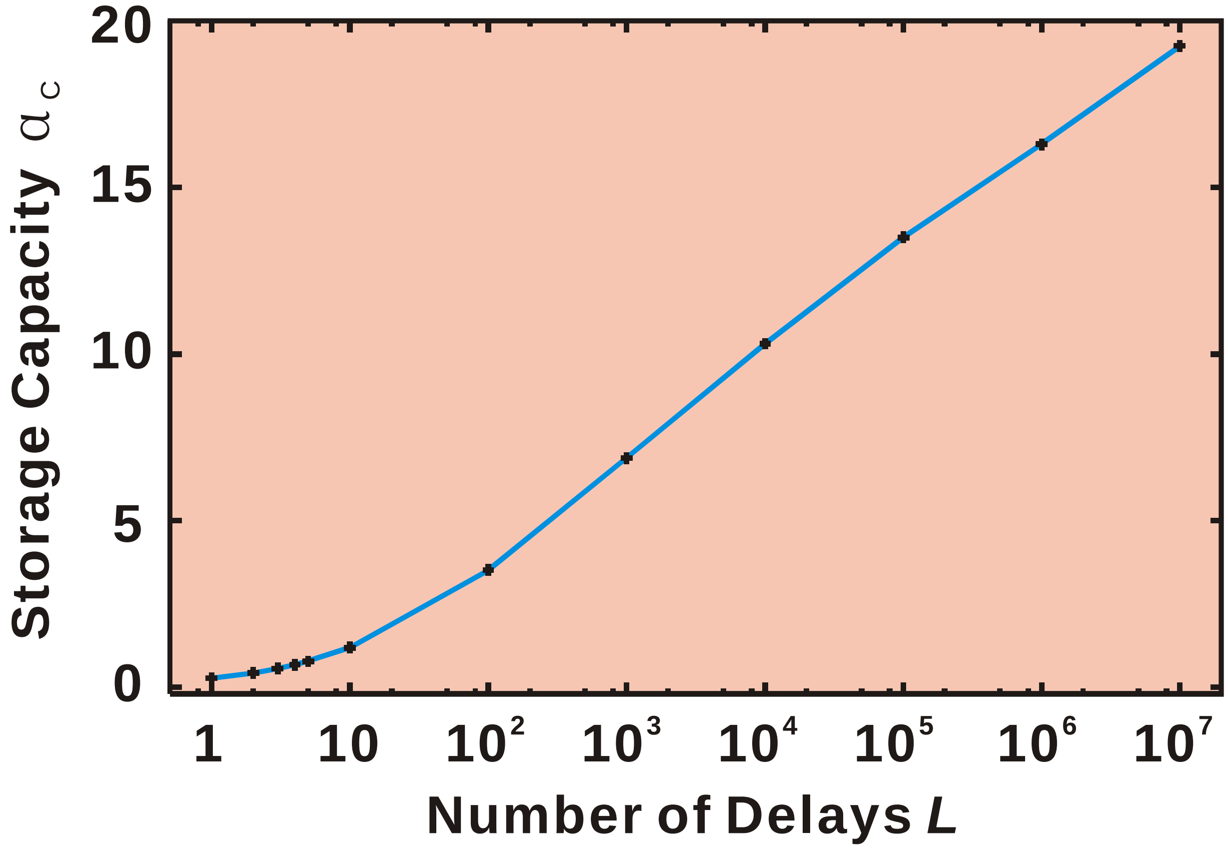
$$\tilde{J}^2 = \int Dz \left(f(z)\right)^2$$



Systematic Pruning (theory & simulation)



Systematic Pruning (theory)



Systematic Pruning (theory)

シナプス総本数が一定であるにもかかわらず，記憶容量が log L に比例して発散．比例定数は 2.8

まとめ

- 全結合の遅延ネットワークの記憶容量は遅延段数 L に比例し，比例定数は 0.195 である．

- シナプス総本数一定の条件下でシナプス結合率を下げながら遅延段数を増すと記憶容量は増大する．

  無作為切断→$2/\pi$ に漸近

  系統的切断→$\log L$ で発散