# 第 17 章　マーケット・モデル

## 1.　マーケットモデル（市場モデル）

マーコウィッツのポートフォリオ理論は理論的には優れていたが，多数の証券が存在するときには，全ての組み合わせの共分散を計算せねばならず作業量が膨大であった。また効率的フロンティアを導くための複雑な計算も必要で，実用性の面で問題が多かった。

そこでシャープは，計算が簡略で実務でも利用可能な，マーケット・モデルを考案した。マーケット・モデルとは，個々のリスク証券の投資収益率が市場に存在する全てのリスク証券を含む市場ポートフォリオの投資収益率と一定の関係を有するとするモデルである。

＜マーケット・モデル＞

$$\tilde{R}_A = \alpha_A + \beta_A \tilde{R}_M + \tilde{e}_A$$

$\tilde{R}_A$ ：個別証券 $A$ の投資収益率

$\tilde{R}_M$ ：市場全体の投資収益率

$\alpha_A$ ：個別証券 $A$ の固有投資収益率

$\beta_A$ ：個別証券 $A$ の市場感応度

$\tilde{e}_A$ ：個別証券 $A$ の誤差項

マーケット・モデルの仮定

① $E[\tilde{e}_A] = 0$ ：誤差項の期待値はゼロである。

② $Cov[\tilde{e}_{Ai}, \tilde{e}_{Aj}] = 0$ ：誤差項は互いに無相関である。

③ $Cov[\tilde{R}_M, \tilde{e}_A] = 0$ ：市場全体の投資収益率と誤差項は無相関である。

## 2.　個別証券の期待収益率と分散

### 2.1　個別証券の期待収益率

個別証券の期待収益率はマーケットモデルの両辺に期待値を取って次のように表される。

$$E[\tilde{R}_A] = E[\alpha_A + \beta_A \tilde{R}_M + \tilde{e}_A]$$
$$= \alpha_A + \beta_A E[\tilde{R}_M]$$

### 2.2　個別証券の分散

個別証券の分散はマーケット・モデルから次のように表される。

$$
\begin{aligned}
\sigma_A^2 &= E[\{\tilde{R}_A - E(\tilde{R}_A)\}^2] \\
&= E[\{(\alpha_A + \beta_A\tilde{R}_M + \tilde{e}_A) - E(\alpha_A + \beta_A\tilde{R}_M + \tilde{e}_A)\}^2] \\
&= E[\{\beta_A(\tilde{R}_M - E(\tilde{R}_M)) + (\tilde{e}_A - E(\tilde{e}_A))\}^2] \\
&= \beta_A^2 E[\{(\tilde{R}_M - E(\tilde{R}_M)\}^2] + 2\beta_A E[\{(\tilde{R}_M - E(\tilde{R}_M))(\tilde{e}_A - E(\tilde{e}_A))\}] + E[\{\tilde{e}_A - E(\tilde{e}_A)\}^2] \\
&= \beta_A^2\sigma_M^2 + 2\beta_A Cov[\tilde{R}_M, \tilde{e}_A] + \sigma_e^2 \\
&= \beta_A^2\sigma_M^2 + 2\beta_A Cov[\tilde{R}_M, \tilde{e}_A] + \sigma_e^2 \\
&= \beta_A^2\sigma_M^2 + \sigma_e^2 \\
&= \text{システマティック・リスク ＋ 非システマティック・リスク}
\end{aligned}
$$

$\sigma_e^2$ ：誤差項の分散

この式から，個別証券の分散（総リスク）は，市場全体の動きに関連する市場リスク（システマティック・リスク）と証券固有のリスク（非システマティック・リスク）の和に等しいことがわかる。

## 3.　最小二乗法（Ordinary Least Squares）

### 3.1　マーケット・モデルの推定

実際のデータを用いてマーケット･モデルのパラメータを推定するのには最小二乗法が用いられる。

$$\tilde{R}_A = \alpha_A + \beta_A\tilde{R}_M + \tilde{e}_A$$

今，個別証券 A の月次収益率と株価指数（日経平均，TOPIX）の月次収益率のデータが $n$ 組個あるとする。そして $\alpha_A$ と $\beta_A$ にある具体的な値を想定したとして，その値を $\hat{\alpha}_A$ と $\hat{\beta}_A$ で表すとする。このとき $\hat{\alpha}_A$ と $\hat{\beta}_A$ を用いた仮の直線 $\hat{\alpha}_A + \hat{\beta}_A\tilde{R}_M$ と，実際の $i$ 番目のデータの組（$R_{Ai}, R_{Mi}$）の間には差異が生じる。この差異のことを残差といい，

$$\hat{u}_{Ai} = R_{Ai} - \hat{\alpha}_A - \hat{\beta}_A R_{Mi}$$

で表される。最小二乗法はこの残差の平方和を最小にするような $\hat{\alpha}_A$， $\hat{\beta}_A$ を求めるもので，具体的には次のように求められる。残差平方和を

$$J = \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{Ai}^2 = \sum_{i=1}^{n}(R_{Ai} - \hat{\alpha}_A - \hat{\beta}_A R_{Mi})^2$$

とおく。そして $J$ を $\hat{\alpha}_A$ と $\hat{\beta}_A$ についてそれぞれ偏微分すると

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} (-2)(R_{Ai} - \hat{\alpha}_A - \hat{\beta}_A R_{Mi})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} (-2R_{Mi})(R_{Ai} - \hat{\alpha}_A - \hat{\beta}_A R_{Mi})$$

が得られる。残差平方和が最小になるような$\hat{\alpha}_A$，$\hat{\beta}_A$は上の二式がゼロになるときの値であるので，上の二式を解くと

$$\begin{cases} n\hat{\alpha}_A + \left(\sum_{i=1}^{n} R_{Mi}\right)\hat{\beta}_A = \sum_{i=1}^{n} R_{Ai} \\ \left(\sum_{i=1}^{n} R_{Mi}\right)\hat{\alpha}_A + \left(\sum_{i=1}^{n} R_{Mi}^2\right)\hat{\beta}_A = \sum_{i=1}^{n} R_{Mi}R_{Ai} \end{cases}$$

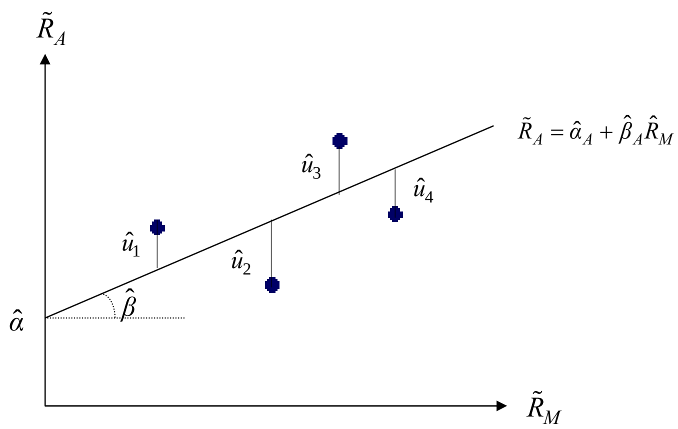
となる。これを<u>正規方程式</u>という。さらにこの正規方程式を解くと，

$$\hat{\beta}_A = \frac{\sigma_{AM}}{\sigma_M^2}$$

$$\hat{\alpha}_A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_{Ai} - \hat{\beta}_A \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_{Mi}$$

という解の公式が求められる。

最小二乗法によるマーケット・モデルの推定




このとき，$R_{Ai} = \hat{\alpha}_A + \hat{\beta}_A R_{Mi} + \hat{u}_{Ai}$ であるので，

$\hat{\beta}_A > 1$：証券 A は市場全体よりも相対的にリスクが大きい

$\hat{\beta}_A < 1$：証券 A は市場全体よりも相対的にリスクが小さい

といえる。

### 3.2　システマティック・リスクと非システマティック・リスクの割合

個別証券のリスクを表す $\sigma_A^2 = \beta_A^2\sigma_M^2 + \sigma_e^2$ の両辺を $\sigma_A^2$ で割ると

$$1 = \frac{\beta_A^2\sigma_M^2}{\sigma_A^2} + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_A^2}$$

が得られる。ここで上式に $\beta_A$ の推定値 $\hat{\beta}_A = \frac{\sigma_{AM}}{\sigma_M^2}$ を代入すると，

$$\begin{aligned}1 &= \left(\frac{\sigma_{AM}}{\sigma_M^2}\right)^2\frac{\sigma_M^2}{\sigma_A^2} + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_A^2}\\ &= \left(\frac{\sigma_{AM}}{\sigma_A\sigma_M}\right)^2 + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_A^2}\\ &= \left(\frac{\sigma_{AM}}{\sigma_A\sigma_M}\right)^2 + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_A^2}\\ &= \rho_{AM}^2 + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_A^2}\end{aligned}$$

= システマティック・リスクの割合 + 非システマティック・リスクの割合

と表される。また $\rho_{AM}^2$ は相関係数の二乗であり，この値は回帰直線の**決定係数**と呼ばれ，$R^2$（r-squared）と表記される。

## 4.　複数証券の期待収益率と分散

### 4.1　複数証券の期待収益率

$n$ 個の証券に投資するポートフォリオの期待収益率は次のように表される。

$$\begin{aligned}E[\tilde{R}_p] &= \sum_{i=1}^{n} w_i E[\alpha_i + \beta_i\tilde{R}_M + \tilde{e}_i]\\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i\alpha_i + E[\tilde{R}_M]\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i\end{aligned}$$

### 4.2　複数証券の分散

$n$ 個の証券に投資するポートフォリオの分散は次のように表される。

$$\sigma_p^2 = E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{w_i\tilde{R}_i - w_iE(\tilde{R}_i)\right\}\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{(w_i\alpha_i + w_i\beta_i\tilde{R}_M + w_i\tilde{e}_i) - E(w_i\alpha_i + w_i\beta_i\tilde{R}_M + w_i\tilde{e}_i)\right\}\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}\left\{\{w_i\beta_i(\tilde{R}_M - E(\tilde{R}_M)) + w_i(\tilde{e}_i - E(\tilde{e}_i))\right\}\right\}^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i^2\beta_i^2\sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{n} w_i w_j \beta_i\beta_j\sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_{e_i}^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i\right)^2\sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_{e_i}^2$$

## 5.　分散投資の効果

$n$ 個の証券に均等に投資する（$w_i = 1/n$）ポートフォリオの分散は次のように表される。

$$\sigma_p^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\beta_i\right)^2\sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\sigma_{e_i}^2$$

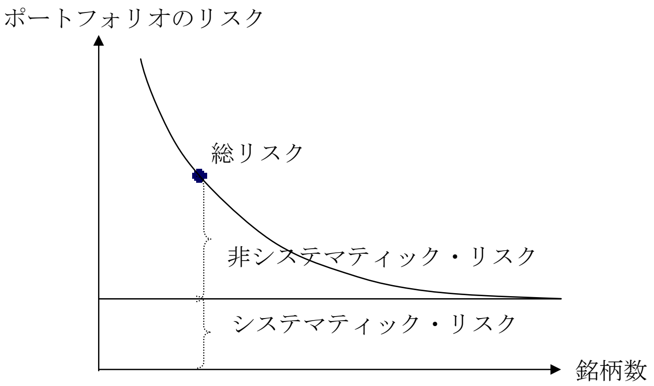
$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right)^2\sigma_M^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{e_i}^2\right)$$

上式の第一項は，ポートフォリオのシステマティック・リスク，第二項はポートフォリオの非システマティック・リスクを表している。このとき銘柄数 $n$ を限りなく増やしていくと第二項はゼロに近づいていく。

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_p^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\beta_i\right)^2\sigma_M^2$$

このことは，総リスクのなかで，非システマティック・リスクは分散投資によって消去可能であるが，システマティック・リスクは分散投資によっても消去不可能なリスクであることを意味している。

分散投資によるリスク低減効果

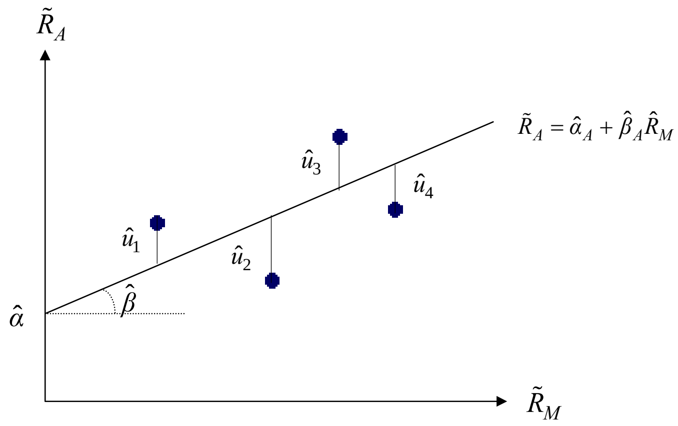


[問題 14-1]

証券 A の 2000 年 1 月から 4 月の月次収益率と TOPIX の月次収益率は以下のようである。このとき以下の問いに答えなさい。

| 年月 | 月次収益率（%） | |
|---|---|---|
| | 証券 A | TOPIX |
| 2000 年 1 月 | 4 | 4 |
| 2000 年 2 月 | 7 | 6 |
| 2000 年 3 月 | 8 | 8 |
| 2000 年 4 月 | 8 | 10 |

最小二乗法によるマーケット・モデルの推定




(1) マーケット・モデル $\tilde{R}_A = \alpha_A + \beta_A \tilde{R}_M + \tilde{e}_A$ のパラメータ $\alpha_A$ と $\beta_A$ の推定値を求めなさい。

$\hat{\alpha}_A$ ＿＿＿＿＿ %　　$\hat{\beta}_A$ ＿＿＿＿＿

（2）推定結果に従えば，TOPIX が 5%上昇したときに証券 A の収益率はどれだけ変化しますか。また証券 A のリスクは市場全体（TOPIX）よりも相対的にリスクが大きいかそれとも小さいか答えなさい。

| 証券 A の変化 | リスク |
|---|---|
| ＿＿＿％ | ＿＿＿＿ |

（3）証券 A のリスクと TOPIX のリスクをそれぞれ求めなさい。

| 証券 A | TOPIX |
|---|---|
| ＿＿＿％ | ＿＿＿％ |

（4）証券 A のシステマティック・リスクと非システマティック・リスクの割合を求めなさい。

＿＿＿＿：＿＿＿＿

[問題 14-2]

証券 A と証券 B をマーケット・モデルで推定したところ以下の結果が得られた。このとき以下の問いに答えなさい。

$R_A = 2\% + 1.2R_M$

$R_B = 3\% + 0.8R_M$

証券 A のリスク（分散）　: $\sigma_A^2 = 7(\%^2)$

証券 B のリスク（分散）　: $\sigma_B^2 = 4(\%^2)$

市場全体のリスク（分散）: $\sigma_M^2 = 3(\%^2)$

（1）証券 A のシステマティック・リスクと非システマティック・リスクの割合を求めなさい。

________ : ________

（2）証券 B のシステマティック・リスクと非システマティック・リスクの割合を求めなさい。

________ : ________

（3）証券 A と証券 B への 50%ずつ投資するポートフォリオのリスクを求めなさい。またこのポートフォリオのシステマティック・リスクと非システマティック・リスクの割合を求めなさい。

リスク（分散）________ $(\%^2)$

________ : ________